Comment bien calculer avec une quatrième proportionnelle (rappel)

Les situations où l'on va pouvoir utiliser ce calcul, avec la quatrième proportionnelle, sont tellement nombreuses et variées. Ce calcul va nous permettre de traiter toutes les questions relatives à des situations de proportionnalité, de réaliser des conversions, de faire des calculs avec les vitesses ... etc ...

Méthode

On réalise un tableau de quatrième proportionnelle à 4 cases :
- en faisant bien attention aux ***unités***, pour bien placer les nombres au bon endroit, car des nombres avec la même unité doivent être placés sur une même ligne ou sur une même colonne.
- le résultat final s'obtient en faisant un **produit en croix**.

Exemple : Une publicité annonce une consommation pour une voiture de 5,6 litres d'essence pour 100 km parcourus. Quelle distance vais-je parcourir avec un plein d'essence (soit 36,4 litres) ?

→ on réalise le tableau suivant

essence (en litres)	5,6 l	36,4 l
distance (en km)	100 km	?

On calcule $(100 \times 36,4) : 5,6 = 650$

Donc on pourra parcourir 650 km avec un plein.

Des applications intéressantes

a) Convertir 37 cm^3 en litres .

Il faut se souvenir ici d'une partie de votre "culture mathématiques" : 1 litre = 1 000 cm^3.

→ on réalise le tableau suivant

cm^3	1 000 cm^3	37 cm^3
litre	1 l	?

On calcule $(1 \times 37) : 1\,000 = 0,037$

Donc on obtient : 37 cm^3 = 0,037 l

b) En 2009, Usain Bolt a battu le record du monde du 100m en 9,58 s. Quelle a été sa vitesse en km/h ?

Il faut tout de suite comprendre que l'on cherche ici un nombre de kilomètres.

Car on veut savoir, en fait, quelle distance il ferait en 1 heure (soit 60 minutes ou 3 600 secondes).

→ on réalise le tableau suivant

distance	100 m	?
temps	9,58 s	~~1h~~ 3600 s

on écrit les temps en secondes

On calcule $(100 \times 3600) : 9,58 = 37\,578$

On obtient donc 37 578 m soit 37,578 km

la réponse est forcément en mètres dans ce tableau

soit une vitesse environ égale à 37,6 km/h.

Comment bien calculer avec les pourcentages (rappel)

Les pourcentages font tellement partie de notre vie courante qu'il faut être parfaitement à l'aise pour les utiliser et les comprendre. Cela doit maintenant faire partie de votre "*culture mathématiques*".
Il faudra distinguer deux types de raisonnements :

- comment calculer un pourcentage (on *cherche* le pourcentage)
- comment appliquer un pourcentage à une quantité (on *connait* le pourcentage)

Comment calculer un pourcentage

Je vous rappelle que mon choix de méthode est de chercher à formuler, à partir de la consigne, une phrase complète en français du type "*il y a ...... sur un total de* ......".

Exemple : Dans une classe de 32 élèves, il y a 27 élèves qui ont obtenu leur brevet en fin d'année. Quel pourcentage de réussite cela représente t'il ?

→ il y a $\boxed{27}$ élèves qui ont réussi $\boxed{\text{sur}}$ un total de $\boxed{32}$

On calcule donc : $\frac{27}{32} = 27 : 32 = 0,84375$.

On multiplie par 100 pour avoir le pourcentage : 84,375%

Comment appliquer un pourcentage à une quantité

Les méthodes de calculs sont ici très nombreuses, mais elles sont finalement très similaires.
Je fais le choix d'en privilégier une , qu'il faudra du coup appliquer sans se poser trop de questions.

Exemple : Dans certains pays, le pourboire à laisser dans un restaurant est un pourcentage de l'addition demandée en fin de repas. Au Canada, ce pourcentage est égal à 15%. Pour une addition de 58 euros, combien dois je laisser comme pourboire ?

→ on calcule 15% $\boxed{\text{de}}$ 58 euros

$$= \frac{15}{100} \boxed{\times} 58 = (15 \times 58) : 100$$
$$= 8,7$$

Donc il faudra laisser un pourboire de 8,7 euros.

Application

On va appliquer maintenant les pourcentages dans des situations de hausse ou de réduction.
Il est bon de revoir un exemple avant de découvrir, dans ce chapitre, une nouvelle méthode de calcul.

Exemple : Un magasin annonce des soldes de 20%. Quel sera le prix, après cette baisse, d'un blouson affiché au départ à 130 euros ?

→ on calcule 20% $\boxed{\text{de}}$ 130 euros

$$= \frac{20}{100} \boxed{\times} 130 = (20 \times 130) : 100$$
$$= 26$$

La baisse est de 26 euros.

Donc le nouveau prix sera : $130 - 26 = 104$ euros.

Les coefficients multiplicateurs (CM) : la définition

L'utilisation de ces *coefficients multiplicateurs* (que l'on notera CM, dans ce chapitre, pour simplifier) est fondamentale pour la suite. On pourra les utiliser dans toutes les situations d'évolutions où une quantité est augmentée (*hausse*) ou diminuée (*baisse*). Ils seront d'autant plus pertinents lorsque l'on travaillera avec des évolutions successives, c'est à dire plusieurs hausses ou baisses à la suite.

Le coefficient multiplicateur pour une hausse

Si on ***augmente*** une quantité d'un certain pourcentage égal à ***t %***
Alors on a un ***coefficient multiplicateur CM*** égal à $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$
et le résultat, après la hausse, s'obtient en ***multipliant directement*** la quantité par ce coefficient CM.

Augmenter de 15 % revient à multiplier directement par le CM égal à $\left(1 + \frac{15}{100}\right) = 1,15$

Augmenter de 20 % revient à multiplier directement par le CM égal à $\left(1 + \frac{20}{100}\right) = 1,20$

Augmenter de 5 % revient à multiplier directement par le CM égal à $\left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1,05$

Le coefficient multiplicateur pour une baisse

Si on ***diminue*** une quantité d'un certain pourcentage égal à ***t %***
Alors on a un ***coefficient multiplicateur CM*** égal à $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$
et le résultat, après la baisse, s'obtient en ***multipliant directement*** la quantité par ce coefficient CM.

Diminuer de 15 % revient à multiplier directement par le CM égal à $\left(1 - \frac{15}{100}\right) = 0,85$

Diminuer de 20 % revient à multiplier directement par le CM égal à $\left(1 - \frac{20}{100}\right) = 0,80$

Diminuer de 5 % revient à multiplier directement par le CM égal à $\left(1 - \frac{5}{100}\right) = 0,95$

Application : on va compléter le tableau suivant (les réponses se trouvent juste en dessous)

Evolution (hausse ou baisse)	***Coefficient Multiplicateur CM***
Hausse de 25 %	*réponse a*
réponse b	1,08
réponse c	1,4
Baisse de 25 %	*réponse d*
réponse e	0,98
réponse f	0,7

→ les réponses sont :

a) 1,25 b) hausse de 8 % c) 1,4 = 1,40 donc c'est une hausse de 40 %

d) 0,75 e) baisse de 2 % f) 0,7 = 0,70 donc c'est une baisse de 30 %

Comment calculer une hausse avec les coefficients multiplicateurs

Il est clair que l'on n'a pas attendu ces *coefficients multiplicateurs* pour savoir calculer un prix après une hausse ou une baisse. Mais il doit être clair aussi qu'ils vont permettre des calculs beaucoup plus rapides.

Méthode

On va prendre l'exemple d'un prix égal à 75 euros qui augmente de 15%.
On cherche le nouveau prix après cette hausse.

→ on commence par calculer le coefficient multiplicateur CM qui correspond à cette hausse de 15%.

Hausse de 15% → $CM = \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 1,15$

→ on multiplie directement l'ancien prix de 75 euros par le CM et on obtient le nouveau prix.

Le nouveau prix est : 75 euros × 1,15 = 86,25 euros

ancien prix CM nouveau prix

Quelques exemples

Un prix de 40 euros augmente de 8 %. On calcule le nouveau prix après cette hausse.

Hausse de 8 % → $CM = \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 1,08$

Le nouveau prix est : 40 euros × 1,08 = 43,2 euros

ancien prix CM nouveau prix

Un prix de 150 euros augmente de 20 %. On calcule le nouveau prix après cette hausse.

Hausse de 20% → $CM = \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 1,20$

Le nouveau prix est : 150 euros × 1,20 = 180 euros

ancien prix CM nouveau prix

Une application qui nous montre bien le gain de temps avec les CM

Un magasin propose différents articles aux prix suivants :

Ce magasin décide d'augmenter de 6 % tous ces prix. Calculer alors l'ensemble de ces nouveaux prix.

→ calcul du CM qui correspond à cette hausse de 6% : $CM = \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 1,06$

→ on peut calculer chaque nouveau prix : 45€ × 1,06 = 47,7 €

62€ × 1,06 = 65,72 €

15€ × 1,06 = 15,9 €

28 € × 1,06 = 29,68 €

Comment calculer une baisse avec les coefficients multiplicateurs

Il est clair que l'on n'a pas attendu ces *coefficients multiplicateurs* pour savoir calculer un prix après une hausse ou une baisse. Mais il doit être clair aussi qu'ils vont permettre des calculs beaucoup plus rapides.

Méthode

On va prendre l'exemple d'un prix égal à 85 euros qui diminue de 25%.
On cherche le nouveau prix après cette baisse.

→ on commence par calculer le coefficient multiplicateur CM qui correspond à cette baisse de 25%.

Baisse de 25% $\longrightarrow$ $CM = \left(1 - \frac{25}{100}\right) = 0,75$

→ on multiplie directement l'ancien prix de 85 euros par le CM et on obtient le nouveau prix.

Le nouveau prix est : 85 euros × 0,75 = 63,75 euros.

ancien prix CM nouveau prix

Quelques exemples

Un prix de 50 euros diminue de 6 %. On calcule le nouveau prix après cette baisse.

Baisse de 6% $\longrightarrow$ $CM = \left(1 - \frac{6}{100}\right) = 0,94$

Le nouveau prix est : 50 euros × 0,94 = 47 euros.

ancien prix CM nouveau prix

Un prix de 120 euros diminue de 40 %. On calcule le nouveau prix après cette baisse.

Baisse de 40% $\longrightarrow$ $CM = \left(1 - \frac{40}{100}\right) = 0,60$

Le nouveau prix est : 120 euros × 0,60 = 72 euros.

ancien prix CM nouveau prix

Une application qui nous montre bien le gain de temps avec les CM

Un magasin propose différents articles aux prix suivants :

Ce magasin décide de tout solder à "- 35%". Calculer alors l'ensemble des nouveaux prix.

→ calcul du CM qui correspond à cette baisse de 35% : $CM = \left(1 - \frac{35}{100}\right) = 0,65$

→ on peut calculer chaque nouveau prix : 45 € × 0,65 = 29,25 €

62 € × 0,65 = 40,3 €

15 € × 0,65 = 9,75 €

28 € × 0,65 = 18,2 €

Les évolutions successives : attention aux idées reçues

On parlera d'***évolutions successives*** lorsqu'on aura *plusieurs hausses* à la suite , ou *plusieurs baisses* à la suite , ou *une succession de hausses et de baisses*. Il faudra alors juste bien appliquer chaque évolution et, surtout, ne pas tomber dans le piège évoqué dans cette fiche (qui ne sera donc plus un piège !).

Le contexte

On va prendre l'exemple d'un prix de 200 euros que l'on ***augmente*** dans un premier temps de 15% , puis dans un deuxième temps de 5%. On cherche le nouveau prix après ***ces deux hausses successives***.

Le piège

Il ne faut ***SURTOUT PAS*** traiter cette consigne en raisonnant de la façon suivante :
Une hausse de 15% et une hausse de 5% correspond à une seule hausse de 20%.
→ ***C'EST COMPLETEMENT FAUX !!***

La méthode (avec la bonne réponse)

Vous devez prendre en compte ***chaque évolution*** et il faudra donc :
- calculer le *coefficient multiplicateur* CM pour la ***hausse de 15%*** , puis pour la ***hausse de 5%***.
- *multiplier* la quantité par le premier coefficient, puis par le deuxième coefficient.

Hausse de 15% → $CM = \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 1,15$

Hausse de 5% → $CM = \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1,05$

Le nouveau prix est : $\underbrace{200\text{ €}}_{\text{ancien prix}} \times \underbrace{1,15}_{\text{première hausse}} \times \underbrace{1,05}_{\text{deuxième hausse}} = \underbrace{241,5\text{ €}}_{\text{nouveau prix}}$

Une application

On considère une entreprise dont l'action côtée en bourse à une valeur, un jour donné, de 47 euros .
Le cours de cette action augmente de 2% le jour suivant , puis il chute de 14% le jour d'après , pour finalement augmenter de 9% le dernier jour.
Quelle est la valeur de cette action après ces *trois évolutions successives* ?

Hausse de 2% → $CM = \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 1,02$

Baisse de 14% → $CM = \left(1 - \frac{14}{100}\right) = 0,86$

Hausse de 9% → $CM = \left(1 + \frac{9}{100}\right) = 1,09$

Le prix de l'action est alors égal à :

$47\text{ €} \times 1,02 \times 0,86 \times 1,09 \approx 44,94\text{ €}$

Comment retrouver un prix initial : attention au piège

Comme dans la fiche précédente, on va se retrouver avec un raisonnement qui contient un piège, lié à une idée reçue, qu'il faudra donc apprendre à éviter.

Le contexte

On considère un objet qui, ***après une hausse*** de 5 %, est affiché à un prix de 136,5 euros.
Quel était le prix de cet objet avant cette hausse ?

Le piège

Il ne faut ***SURTOUT PAS*** traiter cette consigne en raisonnant de la façon suivante :
L'inverse d'une hausse de 5% est une baisse de 5% et on multiplie 136,5 euros par un CM égal à 0,95
→ C'EST COMPLETEMENT FAUX !!

La méthode (avec la bonne réponse)

Vous devez écrire le calcul avec la *hausse de 5%* . Sauf que, dans ce cas, le nombre cherché se trouve dans le membre de gauche et on a donc comme une "*petite équation*" à résoudre.

Hausse de 5% → $CM = \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1{,}05$

On a donc : $\boxed{\;\cdots\;} \times 1{,}05 = 136{,}5$ €

prix initial · CM · nouveau prix

Le prix initial est donc égal à

$136{,}5$ € $: 1{,}05 = 130$ €

Applications

Après une hausse de 15 % , un prix est affiché à 69 euros. Quel était le prix initial ?

Hausse de 15% → $CM = \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 1{,}15$

On a donc : $\boxed{\;\cdots\;} \times 1{,}15 = 69$ €

Le prix initial est 69 € $: 1{,}15 = 60$ €

Après une baisse de 35 % , un prix est affiché à 81,25 euros. Quel était le prix initial ?

Baisse de 35% → $CM = \left(1 - \frac{35}{100}\right) = 0{,}65$

On a donc : $\boxed{\;\cdots\;} \times 0{,}65 = 81{,}25$ €

Le prix initial est $81{,}25 : 0{,}65 = 125$ €