Résoudre une équation : un rappel sur la résolution des équations

Avant d'entamer le travail sur la résolution des *inéquations*, il est nécessaire de reprendre les méthodes sur la résolution des *équations*, car les techniques opératoires vont être les mêmes.
Vous avez, sur ce site, dans l'onglet 4e, un chapitre qui va pouvoir vous aider.
On rappelle juste que le principe général reste d'ISOLER la lettre x et de "*faire passer*" les nombres concernés en INVERSANT LES OPERATIONS.

Des exemples de bases à (re)travailler

On résout l'équation $x \boxed{+ 8} = 15$ $x = 15 \boxed{-8}$ $\boxed{x = 7}$	On résout l'équation $x \boxed{- 9} = 13$ $x = 13 \boxed{+9}$ $\boxed{x = 22}$	On résout l'équation $\boxed{4} x = 18$ $x = 18 \boxed{:4}$ $\boxed{x = 4{,}5}$	On résout l'équation $\boxed{-2} x = 13$ $x = 13 \boxed{:(-2)}$ $\boxed{x = -6{,}5}$

on rappelle que cette situation amène beaucoup d'erreurs

Des équations du type ax + b = c

On résout $2x \boxed{-8} = 10$ $2x = 10 \boxed{+8}$ $\boxed{2} x = 18$ $x = 18 \boxed{:2}$ $\boxed{x = 9}$	On résout $-5x \boxed{+3} = 18$ $-5x = 18 \boxed{-3}$ $\boxed{-5} x = 15$ $x = 15 \boxed{:(-5)}$ $\boxed{x = -3}$

Des équations du type ax + b = cx + d

On résout $7x - 6 = \boxed{3x} + 30$ $\underbrace{7x \boxed{-3x}} - 6 = 30$ $4x \boxed{-6} = 30$ $4x = 30 \boxed{+6}$ $\boxed{4} x = 36$ $x = 36 \boxed{:4}$ $\boxed{x = 9}$	On résout $3x + 4 = \boxed{-2x} + 20$ $\underbrace{3x \boxed{+2x}} + 4 = 20$ $5x \boxed{+4} = 20$ $5x = 20 \boxed{-4}$ $\boxed{5} x = 16$ $x = 16 \boxed{:5}$ $\boxed{x = 3{,}2}$

Les inégalités : le signe "*inférieur* <" et le signe "*inférieur ou égal* ⩽"

Avant d'attaquer la résolution des *inéquations*, il est important de comprendre déjà de quoi on parle.

On va avoir, par exemple, l'apparition du signe "*inférieur ou égal* ⩽" qu'il faut parfaitement comprendre.

Le signe " *inférieur* < "

Ce signe "*inférieur*" est bien connu. On parlera maintenant souvent du signe "*inférieur strict*" pour bien le différencier du signe "*inférieur ou égal*".

En considérant un nombre quelconque noté x, l'écriture $x < 6$ s'appelle une *inégalité*, et elle signifie que ce nombre x doit être *inférieur* à 6 (ou *strictement inférieur* à 6).

La lettre x peut prendre, par exemple, comme valeurs les nombres 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 5,9 ; 5,99 ... etc...
MAIS pas 6 car on ne peut pas être égal à 6 ici
et non plus 6,1 ; 6,2 ; 7 ; 8 qui sont supérieurs.

Le signe " *inférieur ou égal* ⩽ "

Ce signe "*inférieur ou égal*" est une nouveauté. Il rajoute la possibilité de "l'égalité".

En considérant un nombre quelconque noté x, l'écriture $x \leqslant 6$ s'appelle une inégalité, et elle signifie que ce nombre x doit être *inférieur ou égal* à 6.

La lettre x peut prendre toujours les valeurs suivantes 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 5,9 ; 5,99 ... etc...
ET, cette fois, x peut prendre la valeur 6 car on peut être égal à 6 ici.
MAIS toujours pas 6,1 ; 6,2 ; 7 ; 8 qui sont supérieurs.

Quelques particularités de ces signes

Ces particularités sont liées au fait que "*inférieur ou égal*" signifie que l'on peut être *l'un OU l'autre*, c'est à dire *soit inférieur, soit égal.*

On a $6 < 7$. Mais on peut aussi écrire $6 \leq 7$.

En effet, le nombre 6 est bien *inférieur* à 7 et donc il est aussi *inférieur OU égal* .

On a $6 = 6$. Donc on peut aussi écrire $6 \leq 6$.

En effet , le nombre 6 est *égal* à lui-même et donc il est *inférieur OU égal* .

On peut écrire $6 \leq 6$. Mais on ne peut pas écrire $6 < 6$.

En effet , le nombre 6 est *inferieur OU égal* à 6 mais il n'est pas du tout strictement *inférieur* .

Influence des différentes opérations sur les inégalités

Pour bien comprendre ce qui va se jouer avec les *inégalités* et les *inéquations*, par rapport aux *équations*, il est fondamental d'étudier l'effet des différentes opérations sur ces *inégalités*.
En effet, on va pouvoir observer que certaines opérations n'auront aucun effet sur le signe de l'inégalité ALORS QUE d'autres opérations vont entrainer une inversion de ce signe.

Quel effet à une addition sur une inégalité ?
On va partir d'une inégalité et on va *ajouter* le même nombre 4 de chaque côté de l'inégalité.

On a $6 < 8 \longrightarrow 6 + 4 < 8 + 4$
c'est à dire $10 < 12$

Bilan : si on ***additionne*** un même nombre aux deux membres d'une inégalité, alors on ***conserve*** le même sens pour le signe de l'inégalité.

Quel effet à une soustraction sur une inégalité ?
On va partir d'une inégalité et on va *soustraire* le même nombre 4 de chaque côté de l'inégalité.

On a $6 < 8 \longrightarrow 6 - 4 < 8 - 4$
c'est à dire $2 < 4$.

Bilan : si on ***soustrait*** un même nombre aux deux membres d'une inégalité, alors on ***conserve*** le même sens pour le signe de l'inégalité.

Quel effet à une multiplication (ou une division) par un nombre positif sur une inégalité ?
On va partir d'une inégalité et on va *multiplier* chaque côté de l'inégalité par le même nombre 0,5 (ce qui revient à *diviser* par 2).

On a $6 < 8 \longrightarrow 6 \times 0{,}5 < 8 \times 0{,}5$
c'est à dire $3 < 4$

Bilan : si on ***multiplie*** les deux membres d'une inégalité par un même ***nombre POSITIF***, alors on ***conserve*** le même sens pour le signe de l'inégalité.

Quel effet à une multiplication (ou une division) par un nombre négatif sur une inégalité ?
On va partir d'une inégalité et on va *multiplier* chaque côté de l'inégalité par le même nombre - 0,5 (ce qui revient à diviser par - 2).

On a $6 < 8 \longrightarrow 6 \times (-0{,}5) \boxed{>} 8 \times (-0{,}5)$
c'est à dire $-3 \boxed{>} -4$

ON A INVERSÉ LE SIGNE

Bilan : si on ***multiplie*** les deux membres d'une inégalité par un même ***nombre NEGATIF***, alors ***IL FAUT INVERSER*** le sens du signe de l'inégalité.

CONCLUSION

Il faut INVERSER le sens du signe d'une inégalité si on la MULTIPLIE (ou si on la DIVISE) par un nombre NEGATIF.
Et on peut dire que, dans les autres cas, il faut CONSERVER le même sens pour le signe de l'inégalité.

Les solutions d'une inéquation

Quand on résout une *équation*, on obtient (jusqu'à maintenant) une solution unique, c'est à dire que la valeur de x que l'on trouve est le seul nombre qui permet d'obtenir l'égalité initiale.
On va voir que, pour les *inéquations*, il va y avoir une infinité de solutions.

La solution unique d'une équation

On considère l'*équation* $3x + 2 = 17$
Le nombre 5 est l'*unique solution* de cette *équation* car on a $3 \times 5 + 2 = 15 + 2 = 17$
et ce nombre 5 est le seul nombre qui permet d'obtenir cette égalité.

Recherche de solutions d'une inéquation avec le signe >

On considère l'*inéquation* $2x + 5 > 13$

→ le nombre 3 est-il solution de cette inéquation ?

Non car $2 \times 3 + 5 = 11$, et 11 n'est pas supérieur à 13.

→ le nombre 4 est-il solution de cette inéquation ?

Non car $2 \times 4 + 5 = 13$, et on ne doit pas être égal à 13.

→ le nombre 5 est-il solution de cette inéquation ?

Oui car $2 \times 5 + 5 = 15$, et 15 est bien supérieur à 13.

→ le nombre 6 est-il solution de cette inéquation ?

Oui car $2 \times 6 + 5 = 17$, et 17 est bien supérieur à 13.

Bilan : on peut comprendre qu'il va y avoir une infinité de solutions pour l'inéquation $2x + 5 > 13$. Ce sont tous les nombres qui vont être supérieurs à 4. C'est à dire, qu'à partir de ce nombre 4, tous les nombres vont vérifier l'inégalité proposée. **Les solutions s'écriront alors $x > 4$.**

Recherche de solutions d'une inéquation avec le signe ⩾

On considère l'inéquation $3x + 4 \geqslant 19$

→ le nombre 3 est-il solution de cette inéquation ?

Non car $3 \times 3 + 4 = 13$, et 13 n'est pas supérieur à 19

→ le nombre 4 est-il solution de cette inéquation ?

Non car $3 \times 4 + 4 = 16$, et 16 n'est pas supérieur à 19.

→ le nombre 5 est-il solution de cette inéquation ?

Oui car $3 \times 5 + 4 = 19$, et il y a le signe "supérieur ou <u>égal</u>".

→ le nombre 6 est-il solution de cette inéquation ?

Oui car $3 \times 6 + 4 = 22$, et 22 est bien supérieur à 19.

Bilan : on peut comprendre qu'il va y avoir une infinité de solutions pour l'inéquation $3x + 4 \geqslant 19$. Ce sont tous les nombres qui vont être supérieurs à 5, en sachant que le nombre 5 est aussi une solution. C'est à dire, que l'on part du nombre 5 et, qu'en plus, tous les nombres plus grands que 5 vont vérifier l'inégalité proposée. **Les solutions s'écriront alors $x \geqslant 5$.**

Comment résoudre une inéquation
Des exemples pour les opérations de base

Si on sait résoudre des *équations*, alors on saura résoudre sans trop de difficultés des *inéquations*. Les techniques de résolution sont les mêmes MAIS il faudra juste bien gérer le ***sens du signe de l'inéquation***. Il est bien là le seul enjeu !!
En effet , on sait que tant que l'on fait des *additions*, des *soustractions*, ou des *multiplications* et des divisions par un nombre POSITIF alors on NE CHANGERA PAS le ***sens du signe de l'inéquation***.
PAR CONTRE, si on doit *multiplier* ou *diviser* par un nombre NEGATIF , alors il faut INVERSER le ***sens du signe de l'inéquation***.

Sur cette fiche , j'ai fait le choix :
- de toujours partir d'une *inéquation* avec le signe < . Il suffira d'adapter ces exemples aux autres signes, sachant que **le plus important est de savoir quand il faut les inverser**.
- de bien écrire pourquoi on conserve ou on inverse le sens du signe de l'inéquation.

On résout l'inéquation $x \boxed{+\,6} < 15$

$$x < 15 \boxed{-6}$$
$$x < 9$$

*On **conserve** le signe < car on a fait une **soustraction**.*

On résout l'inéquation $x \boxed{-\,4} < 12$

$$x < 12 \boxed{+4}$$
$$x < 16$$

*On **conserve** le signe < car on a fait une **addition**.*

On résout l'inéquation $\boxed{6}\,x < 24$

$$x < 24 \boxed{:6}$$
$$x < 4$$

*On **conserve** le signe < car on a fait une **division par un nombre positif**.*

On résout l'inéquation $\boxed{-\,4}\,x < 37$

$$x \boxed{>} 37 \boxed{:(-4)}$$
$$x \boxed{>} -9{,}25$$

*On **INVERSE** le signe < car on a fait une **division par un nombre NEGATIF**.*

On résout l'inéquation $\dfrac{x}{\boxed{3}} < 5$

$$x < 5 \boxed{\times 3}$$
$$x < 15$$

*On **conserve** le signe < car on a fait une **mutiplication par un nombre positif**.*

On résout l'inéquation $\dfrac{x}{\boxed{-\,8}} < 0{,}75$

$$x \boxed{>} 0{,}75 \boxed{\times(-8)}$$
$$x \boxed{>} -6$$

*On **INVERSE** le signe < car on a fait une **mutiplication par un nombre NEGATIF**.*

On résout l'inéquation $\boxed{3}\,x < -12$

$$x < -12 \boxed{:3}$$
$$x < -4$$

*On **conserve** le signe < car on a fait une **division par un nombre positif**.*
Le fait que le nombre (- 12) soit négatif n'a aucune influence ici.

On résout l'inéquation $\boxed{-\,4}\,x < -20$

$$x \boxed{>} -20 \boxed{:(-4)}$$
$$x \boxed{>} 5$$

*On **INVERSE** le signe < car on a fait une **division par un nombre NEGATIF**.*
C'est bien le signe du (- 4) qui importe ici, et pas celui du (- 20).

Comment résoudre une inéquation du type $a\,x + b < c$

Le principe général pour la résolution de ces *inéquations* est le même que celui des *équations*. Mais on va apprendre à bien observer le signe du "*nombre qui multiplie la lettre x*". Comme il sera *à diviser*, il aura une importance fondamentale sur le fait de conserver ou d'inverser *le sens du signe de l'inéquation.*

Sur cette fiche , j'ai fait, comme sur la fiche précédente, le choix :
- de toujours partir d'une *inéquation* avec le signe $<$. Il vous suffira d'adapter les autres cas.
- d'écrire, à chaque étape, pourquoi on conserve ou on inverse le *sens du signe de l'inéquation.*

On résout l'inéquation $5\,x \boxed{+ 8} < 43$

$5x < 43 \boxed{-8}$

*On **conserve** le signe $<$ car on a fait une **soustraction**.*

$\boxed{5}x < 35$

$x < 35 \boxed{:5}$

*On **conserve** le signe $<$ car on a fait une **division par un nombre positif**.*

$x < 7$

On résout l'inéquation $4\,x \boxed{- 9} < 25$

$4x < 25 \boxed{+9}$

*On **conserve** le signe $<$ car on a fait une **addition**.*

$\boxed{4}x < 34$

$x < 34 \boxed{:4}$

*On **conserve** le signe $<$ car on a fait une **division par un nombre positif**.*

$x < 8{,}5$

On résout l'inéquation $-3\,x \boxed{+ 7} < 22$

$-3x < 22 \boxed{-7}$

*On **conserve** le signe $<$ car on a fait une **soustraction**.*

$\boxed{-3}x < 15$

$x \boxed{>} 15 \boxed{:(-3)}$

*On **INVERSE** le signe $<$ car on a fait une **division par un nombre NEGATIF**.*

⚠ $x \boxed{>} -5$

On résout l'inéquation $-\,x \boxed{- 4} < 6$

$-x < 6 \boxed{+4}$

*On **conserve** le signe $<$ car on a fait une **addition**.*

$\boxed{-}x < 10$

$x \boxed{>} 10 \boxed{:(-1)}$

*On **INVERSE** le signe $<$ car on a fait une **division par un nombre NEGATIF**.*

⚠ $x \boxed{>} -10$

Comment résoudre une inéquation du type $ax + b < cx + d$

Le principe général pour la résolution de ces *inéquations* est le même que celui des *équations*.
Mais, pour savoir si il y aura conservation ou inversion *du sens du signe de l'inéquation,* il faut attendre d'avoir fait la première étape qui consiste à regrouper et à reduire les termes en x .

Sur cette fiche , j'ai fait, comme sur les fiches précédentes, le choix :

- de toujours partir d'une *inéquation* avec le signe $<$. Il vous suffira d'adapter les autres cas.
- d'écrire, à chaque étape, pourquoi on conserve ou on inverse le *sens du signe de l'inéquation.*

On résout l'inéquation $8x + 9 < \boxed{6x} + 23$

$\underbrace{8x \boxed{-6x}} + 9 < 23$

*On **conserve** le signe $<$ car on a fait une **soustraction**.*

$2x \boxed{+9} < 23$

$2x < 23 \boxed{-9}$

*On **conserve** le signe $<$ car on a fait une **soustraction**.*

$\boxed{2}x < 14$

$x < 14 \boxed{:2}$

*On **conserve** le signe $<$ car on a fait une **division par un nombre positif**.*

$x < 7$

On résout l'inéquation $5x - 7 < \boxed{9x} + 19$

$\underbrace{5x \boxed{-9x}} - 7 < 19$

*On **conserve** le signe $<$ car on a fait une **soustraction**.*

$-4x \boxed{-7} < 19$

$-4x < 19 \boxed{+7}$

*On **conserve** le signe $<$ car on a fait une **addition**.*

$\boxed{-4}x < 26$

$x \boxed{>} 26 \boxed{:(-4)}$

*On **INVERSE** le signe $<$ car on a fait une **division par un nombre NEGATIF**.*

$x \boxed{>} -6{,}5$

On résout l'inéquation $5x - 16 < \boxed{-3x} + 24$

$\underbrace{5x \boxed{+3x}} - 16 < 24$

*On **conserve** le signe $<$ car on a fait une **addition**.*

$8x \boxed{-16} < 24$

$8x < 24 \boxed{+16}$

*On **conserve** le signe $<$ car on a fait une **addition**.*

$\boxed{8}x < 40$

$x < 40 \boxed{:8}$

*On **conserve** le signe $<$ car on a fait une **division par un nombre positif**.*

$x < 5$

La représentation graphique des solutions d'une inéquation

Cette représentation graphique des solutions d'une inéquation va utiliser :

- une *droite* (pas nécessairement graduée).
- des *hachures* pour symboliser la partie de la droite où il y a les solutions.
- un *crochet* (dont le sens posera des soucis à beaucoup d'élèves).

La difficulté que l'on va avoir ici est que, *suivant les professeurs*, *suivant les manuels*, on peut tomber sur le choix de ***hachurer*** la partie de la droite ***qui n'est pas solution*** (pour faire comme si on l'avait barré) ou, au contraire, de ***hachurer*** la partie de la droite ***qui est solution*** (pour la rendre plus visible, comme si on l'avait colorié). Il faudra être surtout capable finalement de vous adapter.

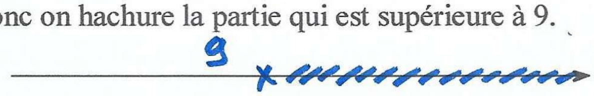
Mon choix sur cette fiche sera de ***hachurer*** la partie de la droite ***qui est solution*** de l'inéquation.

Un exemple détaillé (en plusieurs étapes)

On suppose que l'on a obtenu $x \geqslant 9$ comme solutions d'une inéquation :

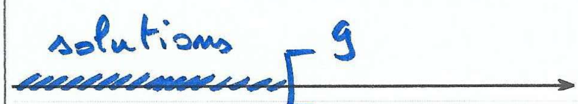
- *étape 1* : on trace une droite (l'origine et les graduations ne sont pas nécessaires) et on place le nombre 9 dessus.

- *étape 2* : on hachure "*à droite*" du 9, puisque l'on a fait le choix de ***hachurer*** la partie de la droite ***qui est solution***, et donc on hachure la partie qui est supérieure à 9.



- *étape 3* : puisque l'on a le signe "*supérieur ou égal*", cela signifie que le nombre 9 ***est*** une solution de cette inéquation. Donc le crochet sur le nombre 9 doit regarder du même côté que les solutions hachurées. Comme si ce crochet était une "petite main" qui attrapait les hachures.

Un tableau récapitulatif (avec les quatre cas possibles)

Solutions de l'inéquation	*Représentation graphique*	*Commentaires*
$x \geqslant 9$		Puisque l'on peut être égal à 9, les crochets regardent du *même côté* que les solutions hachurées.
$x > 9$		Puisque l'on ne peut pas être égal à 9, les crochets regardent de *l'autre côté* que les solutions hachurées.
$x \leqslant 9$		Puisque l'on peut être égal à 9, les crochets regardent du *même côté* que les solutions hachurées.
$x < 9$		Puisque l'on ne peut pas être égal à 9, les crochets regardent de *l'autre côté* que les solutions hachurées.

Comment mettre en inéquation et résoudre un problème (1)

Pour bien résoudre un *problème* en mathématiques, il y a deux phases distinctes :
→ la première consiste à lire (et à relire) la consigne pour bien la comprendre et l'interpréter.
→ la deuxième consiste à résoudre l'inéquation obtenue avec les méthodes de ce chapitre.
Il y aura quatre étapes principales à suivre pour bien résoudre un problème :

- on regarde bien ce que l'on *cherche* et on remplacera cette *inconnue* par la lettre x
- on interprète la consigne et on obtient une condition s'exprimant avec une *inéquation*
- on *résout* cette *inéquation*
- on *conclut* le *problème* (en vérifiant la cohérence des réponses)

Un exemple de problème avec des programmes de calculs

On propose les deux programmes de calculs suivants pour lesquels on cherche ***l'ensemble des nombres*** pour lesquels le programme 1 donne un ***résultat supérieur ou égal*** au programme 2.

Programme 1	*Programme 2*
- Choisir un nombre - Ajouter 5 - Multiplier par 8 - Soustraire 1	- Choisir un nombre - Le multiplier par 2 - Ajouter 4 - Multiplier par 3

Résolution du problème

Je vous conseille de commencer en testant les deux programmes en partant d'un exemple.
On peut vérifier qu'en partant du nombre 2 , on obtient 55 avec le programme 1 et 24 avec le progamme 2.

→ on fait le choix de l'*inconnue*

On note x le nombre de départ.

→ on interprète l'énoncé et on *met le problème en inéquation*

Le programme 1 peut s'écrire $8\times(x+5)-1$ soit $8x+39$

Le programme 2 peut s'écrire $3\times(2x+4)$ soit $6x+12$

On veut : $\boxed{\text{Programme 1} \geqslant \text{Programme 2}}$

soit $8x+39 \geqslant 6x+12$

→ on *résout l'inéquation* obtenue

On résout $8x+39 \geqslant \boxed{6x}+12$

$\underbrace{8x\boxed{-6x}}+39 \geqslant 12$

$2x\boxed{+39} \geqslant 12$

$2x \geqslant 12\boxed{-39}$

$\boxed{2}x \geqslant -27$

$x \geqslant -27\boxed{:2}$ → $\boxed{x \geqslant -13,5}$

→ on *conclut* le problème

Tous les nombres supérieurs ou égaux à $-13,5$ conviendront (comme le nombre 2 testé au départ).

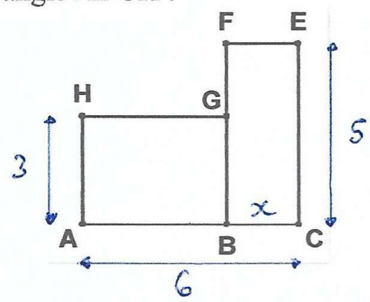
Comment mettre en inéquation et résoudre un problème géométrique (2)

Pour bien résoudre un *problème* géométrique, on va bien retrouver les quatre étapes suivantes :

- on regarde bien ce que l'on *cherche* et on remplacera cette *inconnue* par la lettre x
- on exprime les longueurs, périmètres, et autres aires à l'aide de cette lettre x et on interprète la consigne pour bien l'exprimer avec une *inéquation*
- on *résout* cette *inéquation*
- on *conclut* le *problème* (en vérifiant la cohérence des réponses)

Un exemple de problème avec une figure géométrique

On cherche la mesure du côté [BC] du rectangle BCEF pour que le périmètre de ce rectangle soit supérieur ou égal au périmètre du rectangle ABGH .



Résolution du problème

→ on fait le choix de l'*inconnue*

On note x la mesure du côté [BC].

→ on interprète l'énoncé et on *met le problème en inéquation*

La mesure du côté [AB] est donc égale à $6 - x$.

On veut : $\boxed{\text{Périmètre BCEF} \geq \text{Périmètre ABGH}}$

soit $2 \times (x + 5) \geq 2 \times (3 + 6 - x)$

soit $2 \times (x + 5) \geq 2 \times (9 - x)$

soit $2x + 10 \geq 18 - 2x$

→ on *résout l'inéquation* obtenue

On résout $2x + 10 \geq 18 \boxed{-2x}$

$$2x \boxed{+2x} + 10 \geq 18$$

$$4x \boxed{+10} \geq 18$$

$$4x \geq 18 \boxed{-10}$$

$$\boxed{4}x \geq 8$$

$$x \geq 8 \boxed{:4} \quad \longrightarrow \quad \boxed{x \geq 2}$$

→ on *conclut* le problème

La longueur BC doit être supérieur ou égal à 2 pour avoir la condition souhaitée.