Qu'est ce qu'une équation ? Que signifie "résoudre une équation" ?

Vous avez tous déjà résolu des "*opérations à trou*". Pour faire simple, une *équation* peut être vue comme une forme algébrique de ces "*opérations à trou*", utilisant (en général) la lettre x .

Des exemples d'opérations à trou

On considère "*l'opération à trou*" suivante : $\square + 3 = 10$

→ le nombre à mettre à la place de $\square$ est égal à 7 , car on a $7 + 3 = 10$.

On considère "*l'opération à trou*" suivante : $2 \times \square + 3 = 13$

→ le nombre à mettre à la place de $\square$ est égal à 5 , car on a $2 \times 5 + 3 = 13$.

Opérations à trou et équations

En fait, une "*opération à trou*" et une *équation*, on peut dire que c'est globalement la MÊME CHOSE !
On va faire ce lien, dans le tableau ci-dessous, en utilisant le vocabulaire adapté.

Opération à trou	*Equation*
On dirait : "Compléter l'égalité $\square + 3 = 10$"	On dira : "Résoudre l'équation $x + 3 = 10$"
On dirait : "Compléter l'égalité $2 \times \square + 3 = 13$"	On dira : "Résoudre l'équation $2 \times x + 3 = 13$"

cette équation peut aussi s'écrire $2x + 3 = 13$

Qu'est ce qu'une équation ?

Une *équation* , c'est donc une *égalité*, s'écrivant avec une lettre (ou plusieurs quand vous serez au lycée). La lettre (on utilise très souvent x) s'appelle l'*inconnue* de l'équation, et on cherche à savoir *quel nombre on doit mettre à la place de cette lettre* pour que l'égalité soit vérifiée.

Résoudre l'équation $2x+3=13$ signifie
" par quel nombre doit on remplacer x
pour que l'égalité soit vraie ? "

Que signifie le fait de "résoudre une équation" ?

C'est très simple à comprendre et sans aucun piège !

Résoudre une équation signifie tout simplement retrouver ***la valeur par laquelle il faut remplacer la lettre*** pour que l'égalité proposée soit vérifiée.

Par rapport aux "*opérations à trou*", la grande nouveauté sera la façon de rédiger les solutions.
→ en effet, le but est d'***isoler*** la lettre x dans sa réponse, et on écrira toujours à la fin $x =$ .....

Pour l'équation $x + 3 = 10$
la solution est $\boxed{x = 7}$

Pour l'équation $2x + 3 = 13$
la solution est $\boxed{x = 5}$

Le bilan

opération à trou → $2 \times \square + 3 = 13$
résoudre l'équation → $2x + 3 = 13$
solution de l'équation → $\boxed{x = 5}$

Résoudre une équation : la technique pour les 4 opérations de base

Résoudre une *équation*, cela peut être quelque chose de très simple.
En effet, il est évident que la solution de l'*équation* $2x + 1 = 7$ est $x = 3$, car on a $2 \times 3 + 1 = 7$.
Mais, avec l'*équation* $3{,}5x - 2{,}8 = 13{,}3$, vous allez me dire "Mais, monsieur, comment on fait ?".
Et ça serait normal car il nous faut des ***techniques de calculs*** afin de résoudre ***tous les types*** d'*équations*.

Le principe général

Pour résoudre une *équation*, il faut :
- ISOLER la lettre x , en "*faisant passer*" les nombres qui font que la lettre x n'est pas seule.
- pour faire passer un nombre de l'autre côté de l'égalité, il faut toujours l'accompagner de l'***opération opposée ou inverse***.

*On va sur cette fiche faire le choix d'utiliser un vocabulaire **classique** et **efficace** mais "pas parfaitement mathématiques" (on peut s'interroger sur le sens de la phrase "faire passer un nombre" ...).*

Equation du type x + 3 = 10

On considère l'équation : $x \boxed{+ 3} = 10$
La solution de cette équation est : $x = 7$
Et cela correspond, en fait, à : $x = 10 \boxed{- 3}$

Donc, pour ISOLER la lettre x et résoudre l'équation $x + 3 = 10$,
on "*fait passer*" le nombre 3 de "l'autre côté de l'égalité" EN CHANGEANT L'OPERATION ,
c'est à dire que l'**addition** "*à gauche*" est devenue une **soustraction** "*à droite*".

Equation du type x - 4 = 6

On considère l'équation : $x \boxed{- 4} = 6$
La solution de cette équation est : $x = 10$
Et cela correspond, en fait, à : $x = 6 \boxed{+ 4}$

Donc, pour ISOLER la lettre x et résoudre l'équation $x - 4 = 6$,
on "*fait passer*" le nombre 4 de "l'autre côté de l'égalité" EN CHANGEANT L'OPERATION ,
c'est à dire que la **soustraction** "*à gauche*" est devenue une **addition** "*à droite*".

Equation du type 5x = 20 (*on se souviendra que cela signifie bien 4 $\times x$*)

On considère l'équation : $\boxed{5}x = 20$
La solution de cette équation est : $x = 4$
Et cela correspond, en fait, à : $x = 20 \boxed{: 5}$

Donc, pour ISOLER la lettre x et résoudre l'équation $5x = 20$,
on "*fait passer*" le nombre 5 de "l'autre côté de l'égalité" EN CHANGEANT L'OPERATION ,
c'est à dire que la **multiplication** "*à gauche*" est devenue une **division** "*à droite*".

Equation du type $\frac{x}{2} = 6$ (*on se souviendra que le trait de fraction correspond à une division*)

On considère l'équation : $\frac{x}{\boxed{2}} = 6$
La solution de cette équation est : $x = 12$
Et cela correspond, en fait, à : $x = 6 \boxed{\times 2}$

Donc, pour ISOLER la lettre x et résoudre l'équation $\frac{x}{2} = 6$,
on "*fait passer*" le nombre 2 de "l'autre côté de l'égalité" EN CHANGEANT L'OPERATION ,
c'est à dire que la **division** "*à gauche*" est devenue une **multiplication** "*à droite*".

Comment résoudre une équation
Des exemples pour les 4 opérations de base

Après le prinicipe général vu sur la fiche précédente, vous avez ici une fiche d'exemples dans laquelle les exemples iront par paire. Commencez à faire fonctionner votre mémoire visuelle et photographique !
*Il faudra juste faire **TRES ATTENTION** aux équations du type - 4 x = 12 (la réponse x = 16 est fausse).*

On résout l'équation $x \boxed{+\ 6} = 15$ $x = 15 \boxed{-6}$ $x = 9$	On résout l'équation $x \boxed{+\ 4,2} = 23,1$ $x = 23,1 \boxed{-4,2}$ $x = 18,9$
On résout l'équation $x \boxed{-\ 4} = 12$ $x = 12 \boxed{+4}$ $x = 16$	On résout l'équation $x \boxed{-\ 5,8} = 9,4$ $x = 9,4 \boxed{+5,8}$ $x = 15,2$
On résout l'équation $\boxed{6}\, x = 24$ $x = 24 \boxed{:6}$ $x = 4$	On résout l'équation $\boxed{4}\, x = 37$ $x = 37 \boxed{:4}$ $x = 9,25$
On résout l'équation $\dfrac{x}{\boxed{3}} = 5$ $x = 5 \boxed{\times 3}$ $x = 15$	On résout l'équation $\dfrac{x}{\boxed{8}} = 0,75$ $x = 0,75 \boxed{\times 8}$ $x = 6$

Le cas particulier qui fait des dégâts ! On veut résoudre l'équation - 4 *x* = 12
On a ici une des limites du vocabulaire "*on fait passer*" car beaucoup d'élèves disent "*on fait passer le - 4 qui devient + 4 donc la réponse est x = 16* ". C'est complètement **FAUX** ! Car il y a bien une *multiplication* entre – 4 et *x* , et c'est l'OPERATION qu'il faut inverser (en gardant le nombre négatif – 4).

On résout l'équation - 4 *x* = 12	
Ce qui est FAUX	Ce qui est JUSTE *la multiplication par – 4 devient une division par - 4*
$-4x = 12$ $x = 12 + 4$ $x = \cancel{16}$ FAUX	$\boxed{-4}\,x = 12$ $x = 12 : \boxed{(-4)}$ $x = -3$ VRAI

Applications

On résout l'équation $\boxed{-5}\, x = 15$ $x = 15 : \boxed{(-5)}$ $x = -3$	On résout l'équation $\boxed{-3}\, x = -6$ $x = -6 : \boxed{(-3)}$ $x = 2$

Comment résoudre une équation du type $6x + 7 = 31$

Le principe général de la résolution de ce type d'*équation* est assez simple. Il faut juste respecter ***deux règles de base*** :

- il faut ISOLER la lettre x et il y aura donc ***deux*** nombres "*à faire passer*"
- le deuxième nombre à "*faire passer*" (et donc le dernier) est ***toujours*** celui qui multiplie la lettre x

Un exemple fondamental à bien mémoriser

La *résolution des équations* nous amènent à faire toujours un peu les mêmes choses.
Faites jouer votre mémoire (quelle soit visuelle ou autre ...) pour tout de suite bien réussir.

On veut résoudre l'équation $6x + 7 = 31$

*En appliquant les **deux règles de base** énoncées sur cette fiche :*

- il faut ISOLER la lettre x et il faut donc faire passer les deux nombres 6 et 7 .

- on commence par le nombre 7 pour finir par le nombre 6 qui est celui qui multiplie la lettre x .

On a

$$6x \boxed{+7} = 31$$

$$6x = 31 \boxed{-7}$$

$$\boxed{6}x = 24$$

$$x = 24 \boxed{:6}$$

$$\boxed{x = 4}$$

L'addition "devient" une soustraction

La multiplication "devient" une division

Des exemples

On résout l'équation $4x - 5 = 9$

On a

$$4x \boxed{-5} = 9$$

$$4x = 9 \boxed{+5}$$

$$\boxed{4}x = 14$$

$$x = 14 \boxed{:4}$$

$$\boxed{x = 3{,}5}$$

On résout l'équation $-2x + 7 = 19$ (*attention au "piège" lorsque x est multiplié par un négatif*)

On a

$$-2x \boxed{+7} = 19$$

$$-2x = 19 \boxed{-7}$$

$$\boxed{-2}x = 12$$

$$x = 12 \boxed{:(-2)}$$

$$\boxed{x = -6}$$

Comment résoudre une équation du type $6x + 7 = 31$
Des situations particulières

Je le répète: la résolution des *équations* nous amènent à faire toujours un peu les mêmes choses.
Encore faut-il ne pas se laisser abuser par certaines situations en pensant qu'elles sont si différentes.

On résout l'équation $20 = 5 + 4x$

L'inconnue x est dans le membre de droite, mais cela ne change rien aux règles de bases.

- *il faut ISOLER la lettre x et il faut donc faire passer les deux nombres 5 et 4 .*
- *on commence par le nombre 5 pour finir par le nombre 4 qui est celui qui multiplie la lettre x .*

On a

$$20 = \boxed{5} + 4x$$
$$20 \boxed{-5} = 4x$$
$$15 = \boxed{4}x$$
$$15 \boxed{:4} = x$$
$$\boxed{3{,}75 = x} \longrightarrow \boxed{x = 3{,}75}$$

Vous avez aussi la possibilité d'écrire cette équation sous la forme $5 + 4x = 20$ ou plutôt $4x + 5 = 20$ afin de retrouver la forme classique de ce type d'équation.

On résout l'équation $-x + 5 = 12$

Il y a bien ici deux nombres à faire passer car il ne faut pas oublier que $-x$ correspond à $-1x$.

- *il faut ISOLER la lettre x et il faut donc faire passer les deux nombres -1 et 5 .*
- *on commence par le nombre 5 pour finir par le nombre -1 qui est celui qui multiplie la lettre x .*

On a

$$-x \boxed{+5} = 12$$
$$-x = 12 \boxed{-5}$$
$$\boxed{-}x = 7$$
$$x = 7 \boxed{:(-1)}$$
$$\boxed{x = -7}$$

On résout l'équation $-5x - 8 = -2$

Attention à ne pas oublier les signes "*moins*" en cours d'équation et à ne pas faire d'erreurs de calculs.

On a

$$-5x \boxed{-8} = -2$$
$$-5x = -2 \boxed{+8}$$
$$\boxed{-5}x = 6$$
$$x = 6 \boxed{:(-5)}$$
$$\boxed{x = -1{,}2}$$

Comment résoudre une équation du type $9x - 12 = 7x + 8$: la méthode

Le principe général de la résolution de ce type d'*équation* va nous ramener à ce que l'on sait déjà faire, c'est à dire aux équations expliquées sur les fiches précédentes.
Il va falloir juste respecter ***une première étape*** dans cette résolution :

- il faut regrouper les termes en x du *même coté de l'égalité*. En général, on les regroupe "*à gauche*".
- un terme avec un coefficient positif ($3x$ par exemple) "*passera de l'autre côté*" en devenant négatif ($-3x$) et, inversement, avec un terme à coefficient négatif qui deviendra positif.

Ensuite, pour finir, on réduit l'expression pour les termes en x, et on se retrouve avec une *équation* que l'on a déjà appris à résoudre.

La bonne gestion de cette première étape

On va voir ici des exemples pour lesquels on va juste transformer les équations avec cette première étape, sans aller au bout de la résolution. On peut vérifier que l'écriture ainsi obtenue correspond bien à une équation que l'on a déjà appris à résoudre.

On veut résoudre $7x - 6 = \boxed{3x} + 5$ $\underbrace{7x \boxed{-3x}}\, - 6 = 5$ $4x - 6 = 5$	On veut résoudre $8x - 4 = \boxed{6x} + 3$ $\underbrace{8x \boxed{-6x}}\, - 4 = 3$ $2x - 4 = 3$
On veut résoudre $5x - 9 = \boxed{-2x} + 4$ $\underbrace{5x \boxed{+2x}}\, - 9 = 4$ $7x - 9 = 4$	On veut résoudre $3x - 5 = \boxed{-x} + 2$ $\underbrace{3x \boxed{+x}}\, - 5 = 2$ $4x - 5 = 2$

Un exemple de résolution complète

On veut résoudre l'équation $9x - 12 = 7x + 8$

On a $9x - 12 = \boxed{7x} + 8$

$$\underbrace{9x \boxed{-7x}}\, - 12 = 8$$

on sait déjà résoudre ce type d'équation

$$2x \boxed{-12} = 8$$

$$2x = 8 \boxed{+12}$$

$$\boxed{2}x = 20$$

$$x = 20 \boxed{:2}$$

$$\boxed{x = 10}$$

Comment résoudre une équation du type $8x - 24 = 5x + 18$: des exemples

On va reprendre la méthode vue sur la fiche précédente avec trois exemples. C'est à faire et à refaire !!

Exemple 1 avec l'équation $8x - 24 = 5x + 18$

$$
\begin{aligned}
\text{On a } \quad 8x - 24 &= \boxed{5x} + 18 \\
\underbrace{8x \boxed{-5x}} - 24 &= 18 \\
3x \boxed{-24} &= 18 \\
3x &= 18 \boxed{+24} \\
\boxed{3}x &= 42 \\
x &= 42 \boxed{:3} \quad \longrightarrow \quad \boxed{x = 14}
\end{aligned}
$$

Exemple 2 avec l'équation $x + 12 = 6x + 30$

$$
\begin{aligned}
\text{On a } \quad x + 12 &= \boxed{6x} + 30 \\
\underbrace{x \boxed{-6x}} + 12 &= 30 \\
-5x \boxed{+12} &= 30 \\
-5x &= 30 \boxed{-12} \\
\boxed{-5}x &= 18 \\
x &= 18 \boxed{:(-5)} \quad \longrightarrow \quad \boxed{x = -3,6}
\end{aligned}
$$

on rappelle que x correspond à $1x$

Exemple 3 avec l'équation $6x - 17 = -2x + 29$

$$
\begin{aligned}
\text{On a } \quad 6x - 17 &= \boxed{-2x} + 29 \\
\underbrace{6x \boxed{+2x}} - 17 &= 29 \\
8x \boxed{-17} &= 29 \\
8x &= 29 \boxed{+17} \\
\boxed{8}x &= 46 \\
x &= 46 \boxed{:8} \quad \longrightarrow \quad \boxed{x = 5,75}
\end{aligned}
$$

Comment mettre en équation et résoudre un problème (1)

Pour bien résoudre un *problème* en mathématiques, il y a deux phases distinctes :
→ la première consiste à lire (et à relire) la consigne pour bien la comprendre et l'interpréter.
→ la deuxième consiste à résoudre l'équation obtenue avec les méthodes de ce chapitre.
Il y aura quatre étapes principales à suivre pour bien résoudre un problème :

- on regarde bien ce que l'on *cherche* et on remplacera cette *inconnue* par la lettre x
- on interprète la consigne et on obtient une condition s'exprimant avec une *équation*
- on *résout* cette *équation*
- on *conclut* le *problème* (en vérifiant la cohérence des réponses)

Un exemple de problème avec des programmes de calculs

On propose les deux programmes de calculs suivants pour lesquels on ***cherche le nombre de départ*** qui nous permettra d'obtenir le ***même résultat final*** avec chacun des programmes.

Programme 1	*Programme 2*
- Choisir un nombre - Soustraire 3 - Multiplier par 5	- Choisir un nombre - Le multiplier par 3 - Ajouter 7

Résolution du problème

Je vous conseille de commencer en testant les deux programmes en partant d'un exemple.
On peut vérifier qu'en partant du nombre 2 , on obtient – 5 avec le programme 1 et 13 avec le progamme 2.

→ on fait le choix de l'*inconnue*

On note x le nombre de départ cherché

→ on interprète l'énoncé et on *met le problème en équation*

Le programme 1 peut s'écrire $5\times(x-3)$ soit $5x-15$

Le programme 2 peut s'écrire $3x+7$

On veut : $\boxed{\text{Programme 1} = \text{Programme 2}}$

soit $5x-15 = 3x+7$

→ on *résout l'équation* obtenue

On résout $5x - 15 = \boxed{3x} + 7$

$$\underbrace{5x \boxed{-3x}} - 15 = 7$$

$$2x \boxed{-15} = 7$$

$$2x = 7 \boxed{+15}$$

$$\boxed{2}x = 22$$

$$x = 22 \boxed{:2} \longrightarrow \boxed{x = 11}$$

→ on *conclut* le problème

Le nombre cherché est 11 (on peut le vérifier en partant de 11 pour chaque programme → on obtient 40).

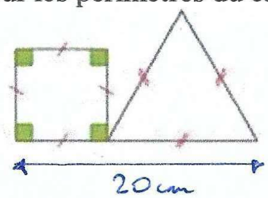
Comment mettre en équation et résoudre un problème géométrique (2)

Pour bien résoudre un *problème* géométrique, on va bien retrouver les quatre étapes suivantes :

- on regarde bien ce que l'on *cherche* et on remplacera cette *inconnue* par la lettre x
- on exprime les longueurs, périmètres, et autres aires à l'aide de cette lettre x et on interprète la consigne pour bien l'exprimer avec une *équation*
- on *résout* cette *équation*
- on *conclut* le *problème* (en vérifiant la cohérence des réponses)

Un exemple de problème avec une figure géométrique

On cherche la mesure du côté du carré pour les périmètres du carré et du triangle équilatéral soient égaux.



Résolution du problème

→ on fait le choix de l'*inconnue*

On note x la mesure du côté du carré.

→ on interprète l'énoncé et on *met le problème en équation*

Si la mesure du côté du carré est égale à x,
alors la mesure du côté du triangle est égale à $20-x$.

On veut : $\boxed{\text{périmètre du carré} = \text{périmètre du triangle équilatéral}}$

soit $4 \times x = 3 \times (20-x)$

soit $4x = 60 - 3x$

→ on *résout l'équation* obtenue

On résout $4x = 60 \boxed{-3x}$

$$\underbrace{4x \boxed{+3x}} = 60$$

$$\boxed{7}x = 60$$

$$x = 60 \boxed{:7} \longrightarrow \boxed{x = \frac{60}{7}}$$

on garde la valeur exacte

→ on *conclut* le problème

La mesure du côté du carré est $\frac{60}{7}$.

→ on peut le vérifier en calculant les périmètres

→ pour le carré : $4 \times \frac{60}{7} = \frac{240}{7}$.

→ pour le triangle équilatéral : $3 \times \left(20 - \frac{60}{7}\right) = 3 \times \frac{80}{7} = \frac{240}{7}$.