Comment montrer qu'un triangle est rectangle
La réciproque de la propriété de Pythagore

La ***réciproque de la propriété de Pythagore,*** c'est un peu comme "*l'inverse*" de la propriété directe.
Pour cette *réciproque*, on ne cherchera pas à calculer une longueur , car on connaitra les longueurs des trois côtés.
Pour cette *réciproque*, on ne partira pas avec l'hyptothèse d'avoir un triangle rectangle, car on cherchera justement à savoir si le triangle proposé est rectangle ou non.
Par contre, la propriété directe et la réciproque utilisent toutes les deux, à un moment donné, une *égalité de Pythagore* du type $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Le principe général de cette réciproque est le suivant :

si on connait les trois longueurs d'un triangle , alors on va pouvoir démontrer qu'un triangle est rectangle (ou non).

Comment montrer qu'un triangle est rectangle : la méthode

On connait les trois longueurs d'un triangle EFG avec EF = 5 cm , FG = 13 cm et EG = 12 cm.
Le triangle EFG est-il un triangle rectangle ?

On repère le plus grand des côtés et on met sa longueur au carré.

Le plus grand côté est le côté [FG] :
On calcule $FG^2 = 13^2 = 169$

On met les deux autres côtés au carré et on fait leur somme.

On calcule $EF^2 = 5^2 = 25$
et $EG^2 = 12^2 = 144$
On obtient : $EF^2 + EG^2 = 25 + 144 = 169$

On constate que l'égalité de Pythagore est bien vérifiée.

On a donc : $\underbrace{FG^2}_{169} = \underbrace{EF^2 + EG^2}_{169}$

On peut conclure en utilisant et en citant la réciproque de la propriété de pythagore.
Et, n'oubliez pas d'écrire "rectangle en ......" afin de bien préciser où se trouve l'angle droit.
***Cet angle droit se trouve forcément** sur le point qui n'est pas sur le plus grand côté (l'hypoténuse).*

On a bien l'égalité et, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore,
le triangle EFG est rectangle en E.

Comment montrer qu'un triangle n'est pas rectangle

La ***réciproque de la propriété de Pythagore,*** c'est un peu comme "*l'inverse*" de la propriété directe.
Pour cette *réciproque*, on ne cherchera pas à calculer une longueur , car on connaitra les longueurs des trois côtés.
Pour cette *réciproque*, on ne partira pas avec l'hyptothèse d'avoir un triangle rectangle, car on cherchera justement à savoir si le triangle proposé est rectangle ou non.
Par contre, la propriété directe et la réciproque utilisent toutes les deux, à un moment donné, une *égalité de Pythagore* du type $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Le principe général de la réciproque est le suivant :

si on connait les trois longueurs d'un triangle , alors on va pouvoir démontrer qu'un triangle est rectangle (ou non).

Comment montrer qu'un triangle n'est pas rectangle : la méthode

On connait les trois longueurs d'un triangle RTM avec RT = 7 cm , RM = 9 cm et TM = 11 cm.
Le triangle RTM est-il un triangle rectangle ?

On repère le plus grand des côtés et on met sa longueur au carré.

Le plus grand côté est le côté [TM].

On calcule $TM^2 = 11^2 = 121$

On met les deux autres côtés au carré et on fait leur somme.

On calcule $RT^2 = 7^2 = 49$

et $RM^2 = 9^2 = 81$

On obtient : $RT^2 + RM^2 = 49 + 81 = 130$

On constate que l'égalité de Pythagore ***n'est pas*** *vérifiée.*

On a donc : $\underbrace{TM^2}_{121} \neq \underbrace{RT^2 + RM^2}_{130}$

On peut conclure, mais on ne cite pas, dans ce cas, la réciproque de la propriété de pythagore.
En effet, d'un point de vue de pure logique mathématiques, le fait que l'égalité ne soit pas vérifiée nous amène à conclure à l'aide de la contraposée de la propriété de Pythagore.
Pour ne pas vous embrouiller, je vous conseille de ne marquer que ce que j'écris ci-dessous.

On n'a pas l'égalité.

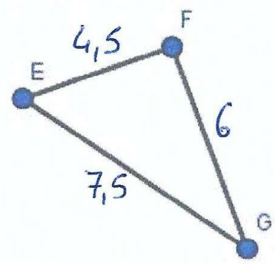
Le triangle RTM n'est pas rectangle.

Des exemples avec la réciproque de la propriété de Pythagore

Vous allez retrouver sur cette fiche deux exemples liés à la *réciproque de la propriété de Pythagore* :

- un des triangles sera effectivement un triangle rectangle, et je vous rappelle qu'on utilise bien la *réciproque de la propriété de Pythagore*, et qu'il faut bien l'écrire dans votre réponse.
- un des triangles ne sera pas rectangle, et dans ce cas, la rédaction de la réponse est plus rapide (puisqu'il s'agit, en fait, de la contraposée de la propriété et qu'on ne l'écrit pas forcément en 4e).

Le triangle EFG est-il un triangle rectangle ?



Le plus grand côté est le côté [EG].

On calcule $EG^2 = 7{,}5^2 = \boxed{56{,}25}$

On calcule aussi $EF^2 = 4{,}5^2 = 20{,}25$

et $FG^2 = 6^2 = 36$

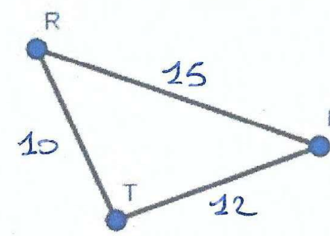
$\rightarrow$ on obtient $EF^2 + FG^2 = 20{,}25 + 36 = \boxed{56{,}25}$

On a donc : $EG^2 = EF^2 + FG^2$

On a bien l'égalité et, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore,

le triangle EFG est rectangle en F.

Le triangle RTM est-il un triangle rectangle ?



Le plus grand côté est le côté [RM]

On calcule $RM^2 = 15^2 = \boxed{225}$

On calcule aussi $RT^2 = 10^2 = 100$

et $TM^2 = 12^2 = 144$

$\rightarrow$ on obtient $RT^2 + TM^2 = 100 + 144 = \boxed{244}$

On a donc : $RM^2 \neq RT^2 + TM^2$

On n'a pas l'égalité,

donc le triangle RTM n'est pas rectangle.

Triangle rectangle dans un cercle – le cercle circonscrit

Cette propriété ne demande ***aucun*** calcul. Elle fait juste un lien géométrique entre cercle et triangle rectangle. Ce lien va paraitre "*tout bête*" et sans beaucoup d'importance.
Détrompez vous car vous allez retrouver son utilisation tout au long de vos études secondaire.

Triangle rectangle dans un cercle de diamètre donné

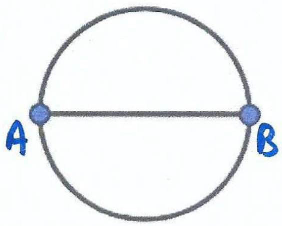


Figure 1

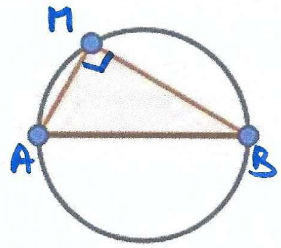


Figure 2

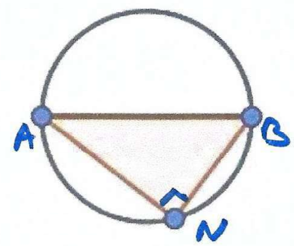


Figure 3

Sur la figure 1 , on part d'un cercle de diamètre [AB].
Sur la figure 2 , on place un point M quelconque sur ce cercle : le triangle AMB est rectangle en M.
Sur la figure 3 , on place un point N quelconque sur ce cercle : le triangle ANB est rectangle en N.

La propriété peut s'exprimer de la façon suivante :
Si un point P appartient à un cercle de diamètre [EF] donné , alors le triangle EPF est rectangle en P.

Cercle circonscrit et triangle rectangle

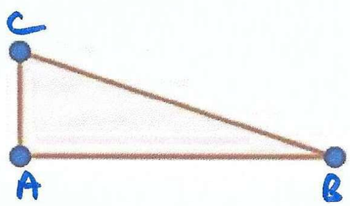


Figure 1

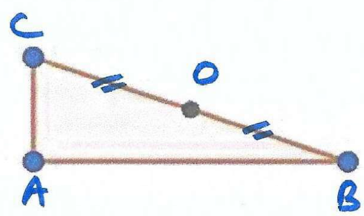


Figure 2

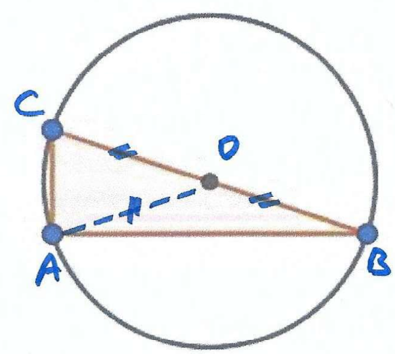


Figure 3

On rappelle que le *cercle circonscrit* d'un triangle est le seul cercle existant qui passera par les trois sommets du triangle.
En faisant le lien avec la propriété précédente, on peut comprendre la propriété suivante

Propriété
Dans un *triangle rectangle*, le cercle circonscrit a son *centre* qui se trouve au *milieu* de l'hypoténuse.
Le rayon de ce cercle est donc égal à la moitié de la longueur de l'hypoténuse (ou le diamètre est égal à toute la longueur de l'hypoténuse).
Le centre O du cercle est équidistant des trois sommets du triangle : on a donc OA = OB = OC.

Pour construire ce cercle :
- on place donc le milieu O de l'hypoténuse (figure 2).
- on trace ensuite le cercle de centre O passant par A (ou par B, ou par C).
  C'est le cercle circonscrit du triangle ABC (figure 3), qui passe par les trois sommets A, B et C.

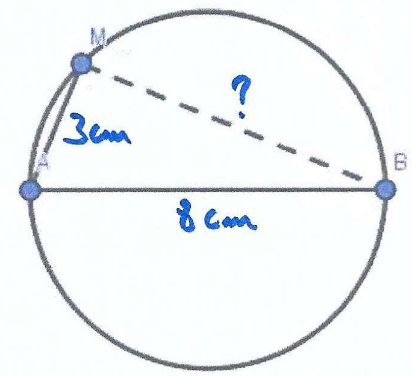
Triangle rectangle dans un cercle et propriété de Pythagore

L'énoncé proposé sur cette fiche est très intéressant.
Il permet d'aborder le travail sur ce que l'on peut appeler les "*questions indirectes*".
En général, on a plutôt l'habitude de traiter des "*questions directes*" du type : "on sait que le triangle ... est rectangle en ... et il faut calculer la longueur ....".
L'utilisation de la propriété de Pythagore est du coup bien visible et automatique.
Par contre, rien dans l'énoncé proposé ci-dessous ne permet de voir directement qu'il faut utiliser la propriété de Pythagore. C'est à vous de construire le fil du raisonnement !

L'énoncé

On considère un segment [AB] tel que AB = 8 cm.
On prend un point M, sur ce cercle, tel que AM = 3 cm. Calculer alors la longueur BM.

Un dessin pour bien voir



La solution

Le point M appartient au cercle de diamètre [AB].
Donc le triangle ABM est rectangle en M.
Donc on peut appliquer la propriété de Pythagore.

On a : $AB^2 = AM^2 + MB^2$

$\rightarrow \quad 8^2 = 3^2 + MB^2$

$\rightarrow \quad 64 = 9 + MB^2$

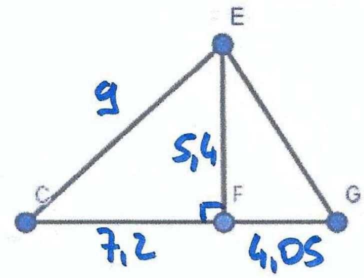
On obtient $MB^2 = 64 \boxed{-} 9 = 55$

soit $MB = \sqrt{55} \simeq 7{,}4$ cm

Un exercice utilisant la propriété de Pythagore et sa réciproque

Ce type d'exercice est très pertinent car il permet de bien fixer les idées en fin de chapitre.
On doit, sur ***une même figure***, utiliser la *propriété de Pythagore* (qui permet, on le rappelle, de calculer une longueur dans un triangle rectangle) et la *réciproque de la propriété de Pythagore* (qui permet, on le rappelle, de déterminer si un triangle est rectangle).
Vous devez donc bien faire la différence entre ces deux raisonnements, et surtout bien identifier les triangles dans lesquels vous devez travailler pour les appliquer.

L'énoncé



a) Calculer la longueur EG.
b) Le triangle ECG est-il rectangle ?

La solution

a)
On calcule EG dans le triangle EFG rectangle en F.
On applique la <u>propriété de Pythagore</u> :

$$EG^2 = EF^2 + FG^2$$

$$\rightarrow \quad EG^2 = 5{,}4^2 + 4{,}05^2$$

On obtient $EG^2 = 45{,}5625$

soit $EG = \sqrt{45{,}5625} = 6{,}75$

b) Le côté le plus grand du triangle ECG est le côté [CG]

On a $CG = 7{,}2 + 4{,}05 = 11{,}25$

On calcule $CG^2 = 11{,}25^2 = \boxed{126{,}5625}$

On calcule aussi $EG^2 = 6{,}75^2 = 45{,}5625$

et $EC^2 = 9^2 = 81$

On obtient $EG^2 + EC^2 = \boxed{126{,}5625}$

On a bien l'égalité $CG^2 = EG^2 + EC^2$ et d'après la <u>réciproque de la propriété de Pythagore</u>, le triangle ECG est rectangle en E.