Qu'est ce qu'une fonction ?

Je prends le parti d'écrire tout de suite la *définition* d'une fonction afin de fixer tout de suite les idées, pour ensuite voir deux *exemples* de fonctions et, enfin, une illustration visuelle.

La définition

On appelle *fonction* un processus qui à un nombre (que l'on appelera nombre de départ dans un premier temps) ***va faire correspondre*** (***va associer***) un autre nombre (que l'on appelera nombre d'arrivée).

Un exemple avec un programme de calcul

On propose ce programme :
- choisir un nombre
- le mettre au carré
- multiplier le résultat par 3
- soustraire 4

→ pour bien "comprendre" ce programme, on choisit de l'appliquer, par exemple, au nombre 5 .

$$5 \xrightarrow{(\ )^2} 25 \xrightarrow{\times 3} 75 \xrightarrow{-4} 71$$

On aura donc une *fonction* qui à 5 (nombre de départ) associe son résultat 71 (nombre d'arrivée).

→ on peut maintenant généraliser ce programme en partant de la lettre x comme nombre de départ.

$$x \xrightarrow{(\ )^2} x^2 \xrightarrow{\times 3} 3x^2 \xrightarrow{-4} 3x^2 - 4$$

On aura donc une *fonction* qui à x associe son résultat $3x^2 - 4$

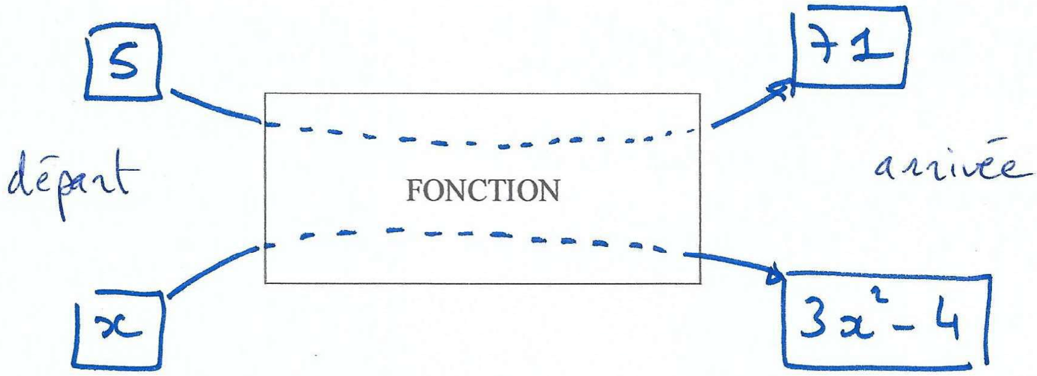
Un exemple avec une formule de la vie courante

On peut exprimer, en fonction de la vitesse v (en *km/h*), la distance de freinage d'un véhicule sur route sèche (en *m*) avec la formule $\frac{v^2}{155}$. Par exemple, pour une voiture roulant à 90 *km/h* , on a une distance de freinage égale à $\frac{90^2}{155}$, c'est à dire environ 52 mètres.

On aura donc une *fonction* qui à 90 (nombre de départ) associe son résultat 52 (nombre d'arrivée).
Ou, plus généralement, on aura donc une *fonction* qui à la vitesse v associe son résultat $\frac{v^2}{155}$ (qui correspond donc à la distance de freinage).

Une illustration (avec la formule $3x^2 - 4$)

On pourra globalement voir une fonction comme une "*machine à calculer*" qui, à un nombre de départ, nous permet d'obtenir, d'une façon ou d'une autre, un nombre d'arrivée.



Les fonctions : vocabulaire et notations

On va reprendre l'exemple de la fiche précédente pour lequel on partait d'un nombre x et pour lequel la formule était $3x^2 - 4$.

Les notations

Très souvent, une fonction se notera avec la lettre f. On parlera alors de la ***fonction f***.
Plusieurs notations sont alors possibles pour exprimer que cette fonction f permet de passer d'un nombre noté x à son résultat noté $3x^2 - 4$.

$$f : x \longrightarrow 3x^2 - 4$$

$$f : x \longrightarrow f(x) = 3x^2 - 4$$

ou plus simplement $f(x) = 3x^2 - 4$

Le vocabulaire : image , antécédent

On a vu, qu'en partant de 5 (nombre de départ), on obtenait un résultat égal à 71 (nombre d'arrivée)

Le nombre 5 qui est le nombre de départ va s'appeler l'***antécédent***.
Le nombre 71 qui est le nombre d'arrivée va s'appeler l'***image***.

Quelques exemples de phrases

71 est l'image de 5 par la fonction f.
5 est l'antécédent de 71 par la fonction f.
5 a pour image 71 par la fonction f.
71 a pour antécédent 5 par la fonction f.
L'image de 5 est égale à 71 par la fonction f.

A retenir absolument

Dans l'écriture f (...) = ... , l'*antécédent* est toujours **dans la parenthèse** et l'*image* est **après le "="**.

On a : $\underbrace{f(\ldots)}_{\text{antécédent}} = \underbrace{\ldots}_{\text{image}}$

En reprenant l'exemple de cette fonction f pour laquelle le nombre 5 avait pour image 71, on aura :

$$5 \xrightarrow{f} 71$$

ou $f(\underbrace{5}_{\text{antécédent}}) = \underbrace{71}_{\text{image}}$

Les trois façons de définir et de représenter une fonction

Nous allons reprendre l'exemple de la *fonction*, qui à x associe son image notée $3x^2 - 4$. Cette fonction peut être définie avec une ***formule***, avec un ***tableau de valeurs*** ou avec une ***courbe représentative***.

Définition avec une formule

Une fonction sera très souvent définie en utilisant la notation $f(x)$. La quantité $f(x)$ va alors correspondre à la *formule* algébrique, qui s'exprime ***en fonction de*** la variable notée x.

On notera : $f(x) = 3x^2 - 4$

Définition avec un tableau à deux lignes

On placera ***sur la première ligne*** la lettre x, avec différentes valeurs qui correspondent à différents nombres de départ et, donc, à différents ***antécédents***

On placera ***sur la deuxième ligne*** les résultats obtenus en remplaçant x dans la formule définissant $f(x)$. Ces résultats correspondent aux nombres d'arrivée et, donc, aux ***images***.

Nombres de départ	***Antécédents***	-2	-1	0	1	2
Nombres d'arrivée	***Images***	8	-1	-4	-1	8

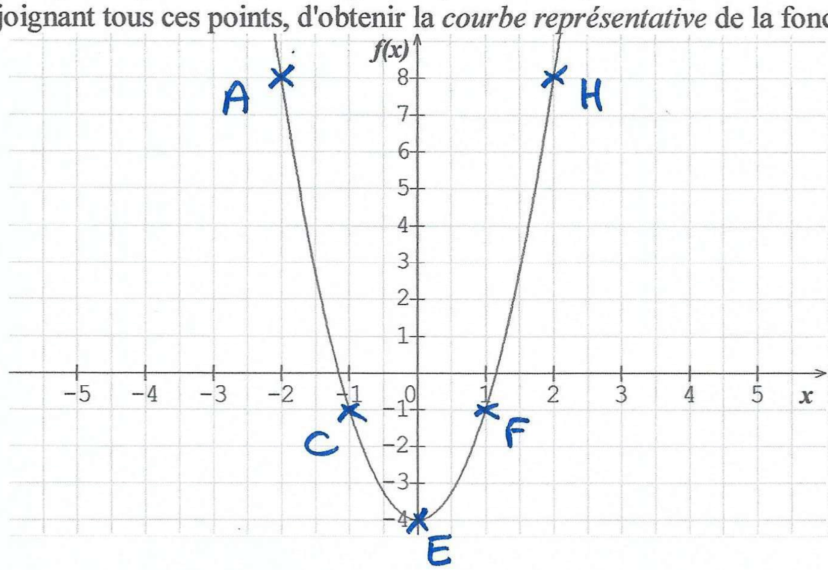
$3\times(-2)^2-4$ $\quad$ $3\times0^2-4$ $\quad$ $3\times2^2-4$

Définition avec une courbe

Chaque *colonne* du tableau précédent peut alors correspondre aux *coordonnées* d'un point dans un repère.
Le nombre de la **première ligne** qui correspond à l'**antécédent** sera l'**abscisse** du point.
Le nombre de la **deuxième ligne** qui correspond à l'**image** sera l'**ordonnée** du point.

Antécédents (abscisses)	-2	-1	0	1	2
Images (ordonnées)	8	-1	-4	-1	8
Points correspondants avec leurs coordonnées	$A(-2;8)$	$C(-1;-1)$	$E(0;-4)$	$F(1;-1)$	$H(2;8)$

L'ensemble de tous les points possibles (en imaginant que l'on remplace x par une infinité de valeurs) nous permet, en rejoignant tous ces points, d'obtenir la *courbe représentative* de la fonction.



Fonction définie avec un tableau
Comment trouver une image ou un antécédent

Comment trouver une image avec une fonction définie par un tableau
Sachant que le tableau est obtenu en remplaçant les nombres de la première ligne dans l'expression de la fonction, et que le résultat correspondant s'écrit sur la deuxième ligne, il est évident que l'on trouvera les images *sur la 2e ligne du tableau* !!

Pour trouver l'image d'un nombre :
on part du nombre sur la première ligne
et on trouve son image sur la deuxième ligne.

Exemples avec le tableau suivant

x	antécédents	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	images	6	2	-1	-1	4	6

On notera que chaque nombre possède une seule et unique image.

L'image de −1 est égale à 6.
L'image de 1 est égale à −1.
L'image de 3 est égale à 4.
L'image de 4 est égale à 6.

Comment trouver un antécédent avec une fonction définie par un tableau
Sachant que le tableau est obtenu en remplaçant les nombres de la première ligne dans l'expression de la fonction, ces nombres représentent forcément les *nombres de départ*, c'est à dire les *antécédents*.

Pour trouver un antécédent d'un nombre :
on part du nombre sur la deuxième ligne
et on trouve son antécédent en remontant sur la première ligne.

Exemples avec le tableau suivant

x		-1	0	1	2	3	4
$f(x)$		6	2	-1	-1	4	6

On notera qu'un nombre peut posséder plusieurs antécédents.

L'antécédent de 4 est égal à 3.
L'antécédent de 2 est égal à 0.
Le nombre 6 a deux antécédents : −1 et 4.
Le nombre −1 a deux antécédents : 1 et 2.

Fonction définie avec une formule
Comment calculer une image

Déjà, vous devez apprendre que les trois consignes suivantes sont équivalentes :

- calculer l'image de 4 par la fonction f
- déterminer $f\ (4)$
- compléter l'égalité : $f\ (4) = ...$

Ensuite, vous devez comprendre que *calculer une image par une fonction définie avec une formule* est très simple, car on connait le nombre de départ, et on cherche le nombre d'arrivée.

Comment trouver une image avec une formule

C'est très simple ! Pour trouver l'image d'un nombre par une fonction , il suffit de remplacer la lettre x par ce nombre dans l'expression $f\ (x)$ de la fonction.

Exemple : On cherche l'image de 4 par la fonction définie par $f\ (x) = 5x + 3$

On remplace x par 4

et on obtient $f(4) = 5 \times 4 + 3 = 23$

c'est l'image de 4

Quelques règles de calculs à rappeler

Si vous calculez une image , et que vous remplacez donc la lettre x , des règles de bases sont à respecter :

- vous devez à chaque fois que votre résultat n'est pas le même que celui du professeur, chercher à comprendre pourquoi, avec VOTRE calculatrice, vous n'avez pas le bon résultat.
- ne confondez pas le "petit moins" des nombres négatifs avec celui de la soustraction.
- protégez bien certains nombres, comme les négatifs, avec des parenthèses.
- évitez de trop détailler vos calculs ; vous pouvez donner vos résultats directement

Un exemple avec une fonction s'écrivant avec x^2

On cherche l'image de 5 par la fonction définie par $f\ (x) = 2x^2 + 4x - 1$

On remplace x par 5

et on obtient $f(5) = 2 \times 5^2 + 4 \times 5 - 1$

$= 2 \times 25 + 4 \times 5 - 1 = 69$

c'est l'image de 5

Un exemple en partant d'un nombre négatif

On cherche l'image de (- 3) par la fonction définie par $g\ (x) = x^2 - 5x - 2$

on remplace x par (-3)

et on obtient $f(-3) = (-3)^2 - 5 \times (-3) - 2$

$= 9 + 15 - 2 = 22$

c'est l'image de (-3)

Un exemple avec une fonction s'écrivant sous la forme d'un quotient

On cherche l'image de 2 par la fonction définie par $h\ (x) = \dfrac{x+7}{x+3}$

on remplace x par 2

et on obtient $h(2) = \dfrac{2+7}{2+3} = \dfrac{9}{5} = 1{,}8$

c'est l'image de 2

Fonction définie avec une formule
Comment calculer un antécédent

Déjà, vous devez apprendre que les trois consignes suivantes sont équivalentes :

- déterminer un antécédent de 6 par la fonction f
- résoudre l'équation $f(x) = 6$
- compléter l'égalité : $f(.....) = 6$

Ensuite, vous devez comprendre que trouver un antécédent revient à retrouver le nombre de départ.

Comment trouver un antécédent avec une formule

Sauf cas très particulier , on devra *résoudre une équation* pour trouver un antécédent puisque l'on cherche à retrouver la valeur de x qui nous permet d'obtenir le résultat donné par la consigne.

Exemple : on cherche un antécédent de 11 par la fonction définie par $f(x) = 5x + 1$

On résout l'équation $5x + 1 = 11$
$5x = 10$
$x = 10 : 5 = 2$

c'est l'antécédent de 11

et on peut vérifier que l'on a bien $f(2) = 11$.

Quelques exemples

N'hésitez pas à retravailler la résolution des équations !

→ on cherche un antécédent de 10 par la fonction définie par $g(x) = 0{,}5x - 6$

On résout l'équation $0{,}5x - 6 = 10$
$0{,}5x = 16$
$x = 16 : 0{,}5 = 32$

c'est l'antécédent de 10

et on peut vérifier que l'on a bien $f(32) = 10$.

→ on cherche un antécédent de 23 par la fonction définie par $h(x) = -4x + 9$

On résout l'équation $-4x + 9 = 23$
$-4x = 14$
$x = 14 : (-4) = -3{,}5$

c'est l'antécédent de 23

et on peut vérifier que l'on a bien $f(-3{,}5) = 23$

Il faut savoir parfois bien lire la consigne

Quand on demande si le nombre 10 est un antécédent de 432, avec la formule $f(x) = 4x^2 + 3x + 2$, on ne va pas résoudre l'équation $4x^2 + 3x + 2 = 432$ (que l'on ne saura résoudre qu'en classe de 1ere).

→ si 10 est un antécédent de 432
alors on peut juste vérifier $f(10) = 432$.

On remplace donc x par 10

On obtient $f(10) = 4 \times 10^2 + 3 \times 10 + 2$
$= 4 \times 100 + 30 + 2 = 432$

c'est bon !

Fonction définie avec un graphique
Comment lire une image

Introduction

Il faudra se souvenir parfaitement de la correspondance suivante.

Les ***nombres de départ***, c'est à dire les ***antécédents*** seront toujours sur l'***axe horizontal des abscisses***.
Et donc, les ***nombres d'arrivée***, c'est à dire les ***images*** se liront toujours sur l'***axe vertical des ordonnées***.

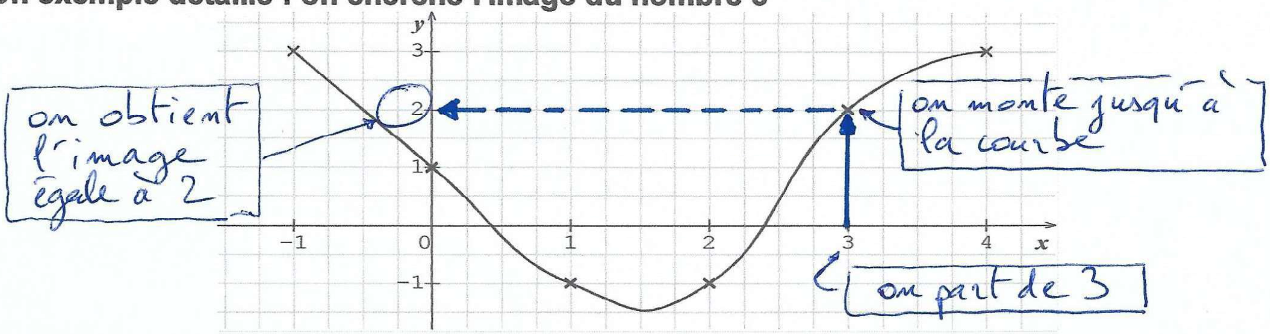
La méthode

Elle est très simple et à appliquer systématiquement dès que l'on cherche une *image*.

Si on cherche l'*image* d'un nombre avec un graphique, on va suivre un "chemin" :

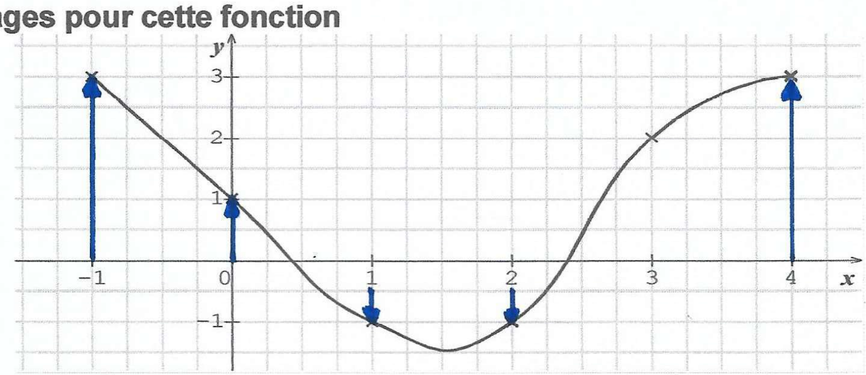
- on part de ce nombre sur l'axe horizontal des abscisses
- on rejoint la représentation graphique de la fonction en allant "vers le haut" ou "vers le bas".
- on obtient donc un point sur ce graphique, et l'*image* cherchée est égale à l'ordonnée de ce point.
  L'*image* est donc **positive** si on est "monté" et elle est **négative** si on est "descendu".

Un exemple détaillé : on cherche l'image du nombre 3



L'image de 3 est donc égale à 2.

Les autres images pour cette fonction



On ne trace pas tous les chemins ici, en considérant que les ordonnées des points se lisent facilement !

L'image de -1 est égale à 3.
L'image de 0 est égale à 1.
L'image de 1 est égale à -1.
L'image de 2 est égale à -1.
L'image de 4 est égale à 3.

Fonction définie avec un graphique
Comment lire un antécédent

Introduction

Il faudra se souvenir parfaitement de la correspondance suivante.

les ***nombres de départ*** , c'est à dire les ***antécédents*** seront toujours sur l'***axe horizontal des abscisses***.

La méthode

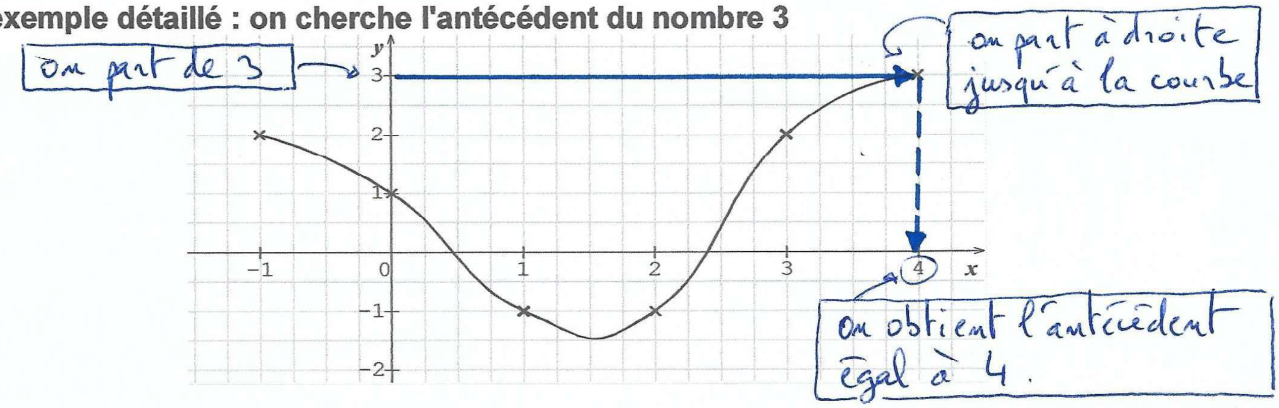
Elle est très simple et à appliquer systématiquement dès que l'on cherche un *antécédent*.

Si on cherche l'*antécédent* d'un nombre avec un graphique, on va suivre un "chemin" :

- on part de ce nombre sur l'axe vertical des ordonnées.
- on rejoint la représentation graphique de la fonction en allant "vers la gauche" ou "vers la droite".
- Si on croise bien le graphique, alors l'*antécédent* (ou les antécédents) correspond à l'abscisse de ce point. L'*antécédent* est donc **positif** si on est "allé à droite" et **négatif** si on est "allé à gauche".

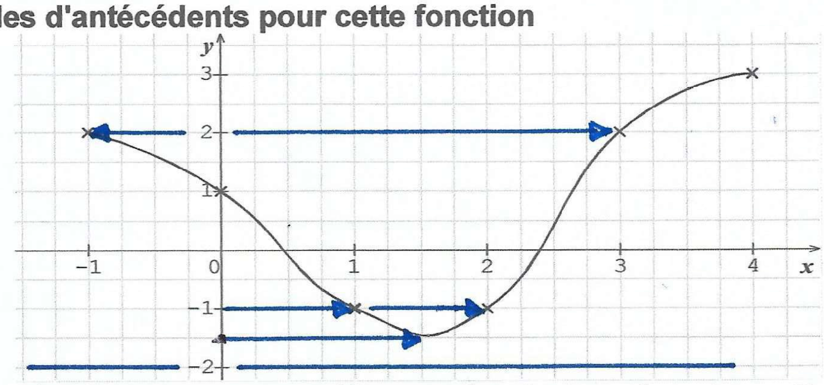
Attention, il est possible de ne pas croiser le graphique. Il n'y aurait alors aucun antécédent.

Un exemple détaillé : on cherche l'antécédent du nombre 3



Le nombre 3 a un seul antécédent égal à 4.

D'autres exemples d'antécédents pour cette fonction



On ne trace pas tous les chemins ici, en considérant que les abscisses des points se lisent facilement !

Le nombre 2 a deux antécédents : -1 et 3.

Le nombre -1 a deux antécédents : 1 et 2.

Le nombre $-1{,}5$ a un seul antécédent égal à $1{,}5$.

Le nombre -2 n'a aucun antécédent.