Comment développer avec la double distributivité (rappel)

L'expérience nous montre que tant que l'on travaille avec des *nombres positifs*, on obtient des pourcentages de réussites très important dans les classes. Les erreurs vont malheureusement arriver avec les *nombres négatifs* car ils vont amener beaucoup de confusions entre les règles.
Mais, une fois qu'on a conscience de cela, il faut donc faire un effort particulier pour éviter toutes ces "*petites*" erreurs qui amènent un résultat final faux.

Un rappel du principe général

En général, on utilise un système de "*flèches*", qui vont symboliser les nombres à multiplier ensemble lors du développement, avec une petite phrase à se répéter : " *une flèche = une multiplication* ".

On aura : $(a+b)\times(c+d) = a\times c + a\times d + b\times c + b\times d$

Exemple

On a $(3x+4)(5x+2) = 3x\times 5x + 3x\times 2 + 4\times 5x + 4\times 2$
$= 15x^2 + 6x + 20x + 8$
$= 15x^2 + 26x + 8$
↳ après réduction

Et avec des nombres négatifs ?

L'enjeu va être ici de bien se souvenir de la règle des signes des multiplications (et de ne pas la confondre avec celle des additions).
Pour le développement, je vous conseille de faire du calcul mental, ***en ne marquant que les résultats*** (sans marquer l'ensemble des calculs). Du coup, vous pouvez marquer en premier les valeurs numériques, puis ensuite leur signe (en appliquant ***la règle des signes des multiplications***). On obtient :

$(5x-4)(3x-6) \rightarrow 15x^2 \quad 30x \quad 12x \quad 24$

soit $(5x-4)(3x-6) = 15x^2 - 30x - 12x + 24$

Pour la réduction, il faut bien se souvenir que l'on a des additions ou des soustractions à effectuer.

Il ne faut pas mélanger les règles : n'oubliez pas que $-5x \times 7x = -35x^2$ et que $-5x + 7x = 2x$!!

Il faut être très concentré sur tous ces calculs. En effet, on se rend compte à quel point les règles sont maitrisées séparément, mais trop rapidement confondues ensuite dans la pratique.

On a : $-30x - 12x = -42x$

Donc, on a : $(5x-4)(3x-6) = 15x^2 - 42x + 24$

Quelques exemples pour que vous puissiez vérifier si vous savez bien faire

Entrainez vous, je vous donne ici l'expression de départ et le résultat après développement et réduction !

$(x+3)(5x+4) = 5x^2 + 19x + 12$

$(4x+2)(8x-3) = 32x^2 + 4x - 6$

$(5x-6)(x+4) = 5x^2 + 14x - 24$

$(7x-2)(3x-5) = 21x^2 - 41x + 10$

Comment développer une expression du type $(a + b)^2$
Les identités remarquables

Il ne faudra jamais oublier que ces identités remarquables sont un "*moyen*" mais pas une "*fin en soi*". Elles permettent d'aller plus vite, d'être plus efficace mais elles doivent être utilisées ***sans aucune erreur***. Car, sinon, autant revenir à la définition $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ et utiliser la double distributivité !

Un exemple avec $(3x + 5)^2$ → ***on utilise le fait que $(3x + 5)^2 = (3x + 5)(3x + 5)$***
On obtient :

$$\begin{aligned}(3x+5)^2 &= (3x+5)(3x+5)\\ &= 9x^2 + 15x + 15x + 25\\ &= 9x^2 + 30x + 25\end{aligned}$$

On peut comprendre que, même en changeant les nombres, on aura toujours le même type de résultats :
- *deux résultats* qui correspondent aux termes que l'on met *au carré.*
- *deux résultats* qui seront toujours égaux (ici, c'est $15x$) et qui vont s'additionner pour donner le terme appelé "***double produit***".

L'identité remarquable $(a + b)^2$
Si on généralise le raisonnement de l'exemple précédent, on obtient un résultat général qui s'appelle une "***identité remarquable***", que l'on notera dans la suite du chapitre "IR1".

$$(a+b)^2 = a^2 + \underbrace{2\times a\times b}_{\text{c'est le double produit}} + b^2$$

on vérifie cette identité avec $(3x+5)^2$
→ $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\times 3x\times 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$

On applique cette identité remarquable IR1 avec quelques exemples
C'est un résultat plutôt facile à appliquer, mais on voit trop souvent l'erreur qui consiste à oublier de multiplier par deux le "*double produit*".

$(2x+4)^2 = (2x)^2 + 2\times 2x\times 4 + 4^2 = 4x^2 + 16x + 16$
$(6x+5)^2 = (6x)^2 + 2\times 6x\times 5 + 5^2 = 36x^2 + 60x + 25$
$(3x+1)^2 = (3x)^2 + 2\times 3x\times 1 + 1^2 = 9x^2 + 6x + 1$
$(x+7)^2 = x^2 + 2\times x\times 7 + 7^2 = x^2 + 14x + 49$
$(2+3x) = 2^2 + 2\times 2\times 3x + (3x)^2$ $= 4 + 12x + 9x^2 = 9x^2 + 12x + 4$ — attention à l'ordre des termes !

Comment développer une expression du type $(a - b)^2$
Les identités remarquables

Il ne faudra jamais oublier que ces identités remarquables sont un "*moyen*" mais pas une "*fin en soi*". Elles permettent d'aller plus vite, d'être plus efficace mais elles doivent être utilisées ***sans aucune erreur***. Car, sinon, autant revenir à la définition $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$ et utiliser la double distributivité !

Un exemple avec $(2x - 6)^2$ → ***on utilise le fait que $(2x - 6)^2 = (2x - 6)(2x - 6)$***
On obtient :

$$\begin{aligned}(2x-6)^2 &= (2x-6)(2x-6)\\ &= 4x^2 - 12x - 12x + 36\\ &= 4x^2 - 24x + 36\end{aligned}$$

On peut comprendre que, même en changeant les nombres, on aura toujours le même type de résultats :
- *deux résultats* qui correspondent aux termes que l'on met *au carré.*
- *deux résultats* qui seront toujours égaux (ici, c'est $-12x$) et qui vont s'additionner pour donner le terme appelé "***double produit***" qui sera forcément ***négatif*** dans ce cas là.

L'identité remarquable $(a - b)^2$
Si on généralise le raisonnement de l'exemple précédent, on obtient un résultat général qui s'appelle une "***identité remarquable***", que l'on notera dans la suite du chapitre "IR2".

$$(a-b)^2 = a^2 - \underline{2}\times a \times b + b^2$$

↳ c'est le double produit "négatif".

On vérifie cette identité avec $(2x-6)^2$

→ $(2x-6)^2 = (2x)^2 - 2\times 2x \times 6 + 6^2 = 4x^2 - 24x + 36$

On applique cette identité remarquable IR2 avec quelques exemples
C'est un résultat plutôt facile à appliquer, mais on voit trop souvent l'erreur qui consiste à oublier de multiplier par deux le "*double produit*", et à oublier (ou à mal placer) le signe "*moins*".

$(2x-4)^2 = (2x)^2 - 2\times 2x \times 4 + 4^2 = 4x^2 - 16x + 16$
$(6x-5)^2 = (6x)^2 - 2\times 6x \times 5 + 5^2 = 36x^2 - 60x + 25$
$(3x-1)^2 = (3x)^2 - 2\times 3x \times 1 + 1^2 = 9x^2 - 6x + 1$
$(x-7)^2 = x^2 - 2\times x \times 7 + 7^2 = x^2 - 14x + 49$
$(2-3x)^2 = 2^2 - 2\times 2 \times 3x + (3x)^2 = 4 - 12x + 9x^2 = 9x^2 - 12x + 4$ attention à l'ordre des termes !

Comment développer une expression du type (a + b)(a – b)
Les identités remarquables

Il ne faudra jamais oublier que ces identités remarquables sont un "*moyen*" mais pas une "*fin en soi*".
Elles permettent d'aller plus vite, d'être plus efficace mais elles doivent être utilisées ***sans aucune erreur***.
Car, sinon, autant revenir à la définition (a + b)(a - b) et utiliser la double distributivité !

Un exemple avec (5*x* - 4)(5*x* + 4)
On obtient :

$$(5x-4)(5x+4) = 25x^2 + 20x - 20x - 16$$
$$= 25x^2 - 16$$

On peut comprendre que, même en changeant les nombres, on aura toujours le même type de résultats :
- *deux résultats* qui correspondent aux termes que l'on met *au carré*, mais avec un des deux qui sera précédé d'un signe "*moins*" par la multiplication d'un "*positif*" par un "*négatif*".
- *deux résultats* qui seront toujours opposés (ici, c'est 20*x* et -20*x*) et qui en s'additionnant vont s'annuler et "*disparaitre*". Pas de double produit au final, pas de termes en "*x*".

L'identité remarquable (a + b)(a – b)
Si on généralise le raisonnement de l'exemple précédent, on obtient un résultat général qui s'appelle une "***identité remarquable***", que l'on notera dans la suite du chapitre "IR3".

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Vous devez tout de suite bien noter que l'ordre des parenthèses n'a aucune importance.
Le résultat est le même en commençant avec la parenthèse avec "+" ou avec la parenthèse avec "-".

$$\rightarrow (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

On vérifie cette identité avec $(5x-4)(5x+4)$

$$\rightarrow (5x-4)(5x+4) = (5x)^2 - 4^2 = 25x^2 - 16$$

On applique cette identité remarquable IR3 avec quelques exemples
C'est un résultat facile à appliquer, mais on voit souvent l'erreur qui consiste à oublier le signe "*moins*".

$(2x+4)(2x-4) = (2x)^2 - 4^2 = 4x^2 - 16$
$(6x+5)(6x-5) = (6x)^2 - 5^2 = 36x^2 - 25$
$(3x-1)(3x+1) = (3x)^2 - 1^2 = 9x^2 - 1$
$(x-7)(x+7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$
$(2+3x)(2-3x) = 2^2 - (3x)^2 = 4 - 9x^2 = -9x^2 + 4$ attention à l'ordre des termes !

Un bilan avec les trois identités remarquables

Il est important de savoir passer d'une identité remarquable à l'autre afin de bien les mémoriser et de ne pas les confondre. Il y a un vrai apprentissage par cœur à effectuer , en utilisant par exemple une forme de mémoire photographique et visuelle.
En effet, pour chacune des identités remarquables, le résultat final sera TOUJOURS de la même forme.

Avec IR1, si on part de (❑ x + ❑)², on obtient forcément un résultat du type ❑ x^2 + ❑ x + ❑ .
Avec IR2, si on part de (❑ x - ❑)², on obtient forcément un résultat du type ❑ x^2 - ❑ x + ❑ .
Avec IR3, si on part de (❑ x + ❑)(❑ x - ❑) ou de (❑ x - ❑)(❑ x + ❑), on obtient forcément un résultat du type ❑ x^2 - ❑ .

→ dans tous les exemples de cette fiche, on indiquera bien s'il faut utiliser IR1 ou IR2 ou IR3.

On balaye les trois identités remarquables avec les mêmes nombres

Cela va permettre de bien visualiser les trois identités remarquables avec leur point commun (les valeurs numériques) et leurs différences.

$(4x+5)^2 = \text{IR1} = 16x^2 + 40x + 25$ $(4x-5)^2 = \text{IR2} = 16x^2 - 40x + 25$ $(4x-5)(4x+5) = (4x+5)(4x-5) = \text{IR3} = 16x^2 - 25$
$(7x+3)^2 = \text{IR1} = 49x^2 + 42x + 9$ $(7x-3)^2 = \text{IR2} = 49x^2 - 42x + 9$ $(7x-3)(7x+3) = (7x+3)(7x-3) = \text{IR3} = 49x^2 - 9$

On "mélange" un peu les trois identités remarquables

Entrainez vous à bien reconnaitre les identités remarquables et à bien trouver chaque résultat.

$(5x-6)^2 = \text{IR2} = 25x^2 - 60x + 36$
$(4x+3)(4x-3) = \text{IR3} = 16x^2 - 9$
$(8x+2)^2 = \text{IR1} = 64x^2 + 32x + 4$
$(x-9)(x+9) = \text{IR3} = x^2 - 81$
$(2x+10)^2 = \text{IR1} = 4x^2 + 40x + 100$
$(3x-7)^2 = \text{IR2} = 9x^2 - 42x + 49$

Comment factoriser avec les identités remarquables

On dit souvent que "*factoriser une expression*", c'est un peu comme "*l'inverse de développer*".
Si on passe de $(3x+4)^2$ à $9x^2+24x+16$, alors on a fait un développement (après une réduction).
Et si on passe de $9x^2+24x+16$ à $(3x+4)^2$, alors c'est là que l'on fait une factorisation.

La méthode pour factoriser avec les identités remarquables

Je vous conseille de faire cette factorisation en plusieurs étapes :

- il faut reconnaitre visuellement si le résultat proposé correspond à IR1, à IR2 ou IR3.
- on prépare les parenthèses qui correspondent à l'identité remarquable reconnue.
  - si on reconnait IR1, alors on écrit $(... + ...)^2$
  - si on reconnait IR2, alors on écrit $(... - ...)^2$
  - si on reconnait IR3, alors on écrit $(... + ...)(... - ...)$ ou $(... - ...)(... + ...)$
- on complète avec les nombres qui mis au carré nous donnerait les résultats du développement

Attention, le double produit ne sert pas pour la factorisation, mais il peut servir pour une vérification.

avec $25x^2+40x+16$ → on reconnait IR1

On écrit $(... + ...)^2$ et on obtient $(5x+4)^2$

↳ pour obtenir 16

↳ pour obtenir $25x^2$

On a donc : $25x^2+40x+16=(5x+4)^2$

avec $9x^2-12x+4$ → on reconnait IR2

On écrit $(... - ...)^2$ et on obtient $(3x-2)^2$

↳ pour obtenir 4

↳ pour obtenir $9x^2$

On a donc : $9x^2-12x+4=(3x-2)^2$

avec $36x^2-49$ → on reconnait IR3

↳ pour obtenir 49

On écrit $(...+...)(...-...)$ et on obtient $(6x+7)(6x-7)$

↳ pour obtenir $36x^2$

On a donc $36x^2-49=(6x+7)(6x-7)$

Quelques exemples de factorisations à savoir retrouver

On a $x^2+10x+25$ = IR1 = $(x+5)^2$

On a $4x^2-4x+1$ = IR2 = $(2x-1)^2$

On a $9x^2-16$ = IR3 = $(3x+4)(3x-4)$

On a $49x^2-42x+9$ = IR2 = $(7x-3)^2$

On a x^2-100 = IR3 = $(x+10)(x-10)$

On a $25x^2+80x+64$ = IR1 = $(5x+8)^2$