Egalité de fractions et principe fondamental des opérations

Il va falloir bien apprendre, tout au long de ce chapitre, que certaines opérations fractionnaires ne demandent à changer AUCUNE fraction dans le calcul, alors que d'autres opérations ne pourront se faire qu'après avoir CHANGER les écritures.

Egalité de deux fractions

C'est la base de tout le travail sur les fractions.

Deux fractions sont ***égales*** entre elles si on peut "passer" de l'une à l'autre en ***multipliant*** ou en ***divisant le numérateur et le dénominateur*** par le ***même*** nombre

Exemples : On a $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{8}{10}$

On a $\frac{15}{21} = \frac{15 : 3}{21 : 3} = \frac{5}{7}$

Applications

→ A tout moment, on pourra remplacer une fraction par *une "autre" fraction égale*, sans changer le résultat final. On va alors "*réduire au même dénominateur*" ou "*mettre sous le même dénominateur*".

→ Très souvent, on sera amené à simplifier un résultat fractionnaire afin d'obtenir la fraction la plus simple possible. Pour cela, il faudra que le numérateur et le dénominateur soient divisibles par les mêmes nombres.

Si on a obtenu $\frac{12}{18}$ comme résultat final, alors les deux nombres sont divisibles par 6.

On obtient $\frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$

Les deux catégories de calcul fractionnaire

Dans les fiches suivantes, on va voir l'ensemble des calculs fractionnaires. Mais il faut tout de suite comprendre qu'ils vont se séparer en deux catégories, qui vont amener des actions très différentes.

Pour la *première catégorie*, on pourra faire les calculs SANS avoir à changer les fractions, car le calcul pourra se faire directement. Cela concerne ici :

- ***les additions et les soustractions de fractions qui ont le même dénominateur.***
- ***les multiplications dans TOUS les cas.***

Pour la *deuxième catégorie*, on sera obligé d'avoir une action mathématique sur les fractions ou sur le calcul. Cela concerne ici :

- ***les additions et les soustractions de fractions n'ayant pas le même dénominateur.***
- ***les divisions dans TOUS les cas.***

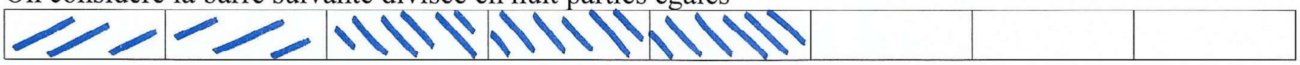
Du coup, si vous modifiez vos fractions pour la première catégorie, vous allez, *au mieux*, vous compliquer les calculs et, *au pire*, vous allez donner des résultats faux.
Et si vous ne modifiez pas vos fractions pour la deuxième catégorie, cela sera automatiquement faux !

Addition et soustraction de fractions ayant le même dénominateur

Ce sont les opérations de base du calcul fractionnaire. Et elles sont extrêmement faciles à faire.
Ne les rendez pas compliquées en apprenant mal votre cours ! Car on est bien dans la catégorie des opérations ne demandant ***AUCUN changement d'écriture***.

Une illustration pour comprendre la règle

On considère la barre suivante divisée en huit parties égales



On a hachurée une fraction de la barre égale à $\frac{2}{8}$

On a hachurée (avec des hachures dans l'autre sens) une fraction de la barre égale à $\frac{3}{8}$

Donc, en tout, on peut dire que l'on a hachuré une fraction de la barre égale à $\frac{5}{8}$

On a donc $\frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

La règle pour l'addition et pour la soustraction (avec le même dénominateur)

Pour *additionner* deux fractions qui ont le ***même dénominateur***, il suffit d'additionner les deux numérateurs entre eux MAIS on garde inchangé le dénominateur.
Pour *soustraire* deux fractions qui ont le ***même dénominateur***, il suffit de soustraire les deux numérateurs entre eux MAIS on garde inchangé le dénominateur.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{\boxed{b}} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{\boxed{b}}$$

om garde le dénominateur

Exemples

On a $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5+1}{\boxed{8}} = \frac{6}{8}$ (om garde le 8)

On a $\frac{1}{3} + \frac{7}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1+7+5}{\boxed{3}} = \frac{13}{3}$ (om garde le 3)

On a $\frac{8}{7} - \frac{2}{7} = \frac{8-2}{\boxed{7}} = \frac{6}{7}$ (om garde le 7)

Ce qu'il ne faut surtout pas faire

Ce sont des erreurs souvent vues et, donc, vous devez vous entrainer à ne pas les faire.

$$\frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5+1}{\boxed{4+4}} = \frac{6}{8}$$

$$\frac{6}{9} - \frac{1}{9} = \frac{6-1}{\boxed{9-9}} = \frac{5}{0}$$

c'est FAUX !

La multiplication de deux fractions

La multiplication est une autre opération faisant partie de la catégorie des opérations qui ne demande AUCUN changement d'écriture.
C'est, du coup, une opération très simple que l'on aurait pu voir en sixième ou en cinquième, sauf qu'il nous manquait alors le chapitre du début de cette année sur la multiplication avec les nombres négatifs.

La règle de mutiplication

Pour *multiplier* deux fractions, quels que soient les nombres qui les constituent, il suffit juste de ***multiplier ensemble*** les deux numérateurs et de multiplier ensemble les deux dénominateurs.

On aura : $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$

Quelques exemples

*Dans tous ces exemples, vous devez comprendre que la seule compétence en jeu est, en fait, de "**savoir multiplier entre eux des nombres positifs ou négatifs**".*
Pour les résultats, vous devez retenir tout de suite que si il y a un signe "moins" dans la réponse, alors il peut être placé "en haut" ou "en bas" ou "devant la fraction". En effet, on a $\dfrac{-2}{3} = \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{2}{3}$.

On a $\dfrac{3}{7} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{3 \times 2}{7 \times 5} = \dfrac{6}{35}$

On a $\dfrac{4}{3} \times \dfrac{7}{5} = \dfrac{4 \times 7}{3 \times 5} = \dfrac{28}{15}$

On a $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{-5}{7} = \dfrac{2 \times (-5)}{3 \times 7} = \dfrac{-10}{21} = -\dfrac{10}{21}$

On a $\dfrac{-7}{5} \times \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{-7 \times (-2)}{5 \times (-3)} = \dfrac{14}{-15} = -\dfrac{14}{15}$

On a $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{8}{7} = \dfrac{2 \times 4 \times 8}{3 \times 5 \times 7} = \dfrac{64}{105}$

On a $\dfrac{4}{1} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{4 \times 2}{1 \times 7} = \dfrac{8}{7}$

on peut rajouter ce 1 pour avoir une fraction.

On a $\dfrac{-3}{1} \times \dfrac{5}{-11} = \dfrac{-3 \times 5}{1 \times (-11)} = \dfrac{-15}{-11} = \dfrac{15}{11}$

Addition et soustraction de fractions ayant des dénominateurs différents
La méthode

Nous abordons ici les premières opérations faisant partie de la catégorie des opérations qui demandent une action mathématique et un CHANGEMENT d'écriture. Vous devez tout de suite retenir que si vous faites ici directement le calcul, vous aurez forcément un résultat faux.

Ce qu'il ne faut surtout pas faire

Voici l'erreur souvent vue et, donc, vous devez vous entrainer à ne pas la faire.
Elle consiste à effectuer directement le calcul alors que les fractions n'ont pas le même dénominateur et que, donc, vous n'en avez pas le droit.

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{5}=\frac{2+7}{3+5}=\frac{9}{8} \longrightarrow \text{c'est FAUX !}$$

La méthode pour l'addition et la soustraction (avec des dénominateurs différents)

Puisque les fractions n'ont pas le même dénominateur, vous ne pouvez pas faire directement le calcul.
Vous devez justement faire en sorte que les fractions aient le même dénominateur.
Pour cela, vous allez "***réduire les fractions au même dénominateur***" avec les étapes suivantes :

- vous allez choisir comme dénominateur commun le **produit** des deux dénominateurs.
- vous allez remplacer chaque fraction par une fraction égale en multipliant son numérateur et son dénominateur par un coefficient adapté.
- une fois que les fractions ont le même dénominateur, vous pouvez maintenant finir le calcul.

Un exemple fondamental

On veut calculer $\frac{2}{3}+\frac{7}{5}$

*Le **dénominateur commun** sera égal à $3 \times 5 = 15$*

*La fraction $\frac{2}{3}$ doit donc être **multipliée par 5** "en haut et en bas" pour que le **dénominateur passe à 15**.*

*La fraction $\frac{7}{5}$ doit donc être **multipliée par 3** "en haut et en bas" pour que le **dénominateur passe à 15**.*

Une fois que les deux fractions ont le même dénominateur 15, on peut faire l'addition sans souci.

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{5}$$

$$=\frac{2\times 5}{3\times 5}+\frac{7\times 3}{5\times 3}$$

$$=\frac{10}{15}+\frac{21}{15}$$

$$=\frac{10+21}{15}=\frac{31}{15}$$

Addition et soustraction de fractions ayant des dénominateurs différents
Quelques exemples

Les exemples de cette fiche doivent être ***faits et refaits*** afin de bien intégrer la méthode de calcul.

On veut calculer $\frac{3}{4} + \frac{7}{5}$ → *le **dénominateur commun** sera égal à $4 \times 5 = 20$*

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{5} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} + \frac{7 \times 4}{5 \times 4} = \frac{15}{20} + \frac{28}{20} = \frac{15+28}{20} = \frac{43}{20}$$

On veut calculer $\frac{1}{6} + \frac{3}{7}$ → *le **dénominateur commun** sera égal à $6 \times 7 = 42$*

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{7} = \frac{1 \times 7}{6 \times 7} + \frac{3 \times 6}{7 \times 6} = \frac{7}{42} + \frac{18}{42} = \frac{7+18}{42} = \frac{25}{42}$$

On veut calculer $\frac{7}{4} - \frac{2}{3}$ → *le **dénominateur commun** sera égal à $4 \times 3 = 12$*

$$\frac{7}{4} - \frac{2}{3} = \frac{7 \times 3}{4 \times 3} - \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{21}{12} - \frac{8}{12} = \frac{21-8}{12} = \frac{13}{12}$$

On veut calculer $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ → *le **dénominateur commun** sera égal à $5 \times 6 = 30$*

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1 \times 6}{5 \times 6} - \frac{1 \times 5}{6 \times 5} = \frac{6}{30} - \frac{5}{30} = \frac{6-5}{30} = \frac{1}{30}$$

On veut calculer $\frac{-8}{5} - \frac{2}{3}$ → *le **dénominateur commun** sera égal à $5 \times 3 = 15$*

$$\frac{-8}{5} - \frac{2}{3} = \frac{-8 \times 3}{5 \times 3} - \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{-24}{15} - \frac{10}{15} = \frac{-24-10}{15} = -\frac{34}{15}$$

on écrit le (−) devant

On veut calculer $\frac{7}{-2} + \frac{4}{3}$ → *le **dénominateur commun** sera égal à $-2 \times 3 = -6$*

$$\frac{7}{-2} + \frac{4}{3} = \frac{7 \times 3}{-2 \times 3} + \frac{4 \times (-2)}{3 \times (-2)} = \frac{21}{-6} + \frac{-8}{-6} = \frac{21-8}{-6} = -\frac{13}{6}$$

on écrit le (−) devant

Addition et soustraction : le cas particulier des dénominateurs multiples

Ce cas particulier est lié au fait que les dénominateurs sont dans une même table de multiplication.
On peut donc passer de l'un à l'autre par une multiplication et, donc, on pourrait très bien, contrairement au cas général, ne ***changer qu'une fraction***.
Pour autant, faire ce calcul avec le cas général ne serait pas faux, mais il demanderait, à la fin, une simplification supplémentaire afin d'avoir un résultat fractionnaire simplifié.

Un exemple fondamental

On veut calculer $\frac{4}{3} + \frac{5}{6}$

avec la méthode particulière *→ on choisit 6 comme dénominateur commun.*

La fraction $\frac{4}{3}$ *doit donc être* ***multipliée par 2*** *"en haut et en bas" pour que* ***le dénominateur passe à 6****.*

La fraction $\frac{5}{6}$ ***ne doit pas être multipliée*** *car elle a déjà le dénominateur égal à 6.*

$$\frac{4}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4\times 2}{3\times 2} + \frac{5}{6} = \frac{8}{6} + \frac{5}{6} = \frac{13}{6}$$

↳ on ne change pas cette fraction.

avec la méthode générale *→ le dénominateur commun sera égal à 3 × 6 = 18*

La fraction $\frac{4}{3}$ *doit donc être* ***multipliée par 6*** *"en haut et en bas" pour que le* ***dénominateur passe à 18****.*

La fraction $\frac{5}{6}$ *doit donc être* ***multipliée par 3*** *"en haut et en bas" pour que le* ***dénominateur passe à 18****.*

$$\frac{4}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4\times 6}{3\times 6} + \frac{5\times 3}{6\times 3} = \frac{24}{18} + \frac{15}{18} = \frac{39}{18} \overset{:3}{=} \frac{13}{6}$$

Des exemples avec la méthode particulière utilisant les multiples

On veut calculer $\frac{7}{2} + \frac{4}{6}$ *→ on choisit 6 comme dénominateur commun.*

$$\frac{7}{2} + \frac{4}{6} = \frac{7\times 3}{2\times 3} + \frac{4}{6} = \frac{21}{6} + \frac{4}{6} = \frac{25}{6}$$

↳ on ne change pas cette fraction

On veut calculer $\frac{23}{10}$ - 2 *→ on rajoute 1 sous le nombre 2 et on choisit 10 comme dénominateur commun.*

$$\frac{23}{10} - \frac{2}{1} = \frac{23}{10} - \frac{2\times 10}{1\times 10} = \frac{23}{10} - \frac{20}{10} = \frac{3}{10}$$

↳ on ne change pas cette fraction

La division de deux fractions : la méthode

C'est la dernière opération à voir cette année sur les fractions. Elle fait partie des opérations qui demandent un CHANGEMENT d'écriture. Il faudra pour cela voir la notion d'INVERSE de fraction.

Ecriture des calculs

Suivant les manuels et leurs exercices, la *division* de deux fractions peut s'écrire de deux façons qui sont équivalentes.

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$$

Vous devez retenir que le symbole "=" doit se trouver au niveau du trait de la fraction "principale".

L'inverse d'une fraction

Prendre l'*inverse* d'une fraction, c'est tout simplement *inverser le numérateur et le dénominateur.*

L'inverse de $\frac{2}{3}$ est égal à $\frac{3}{2}$.

L'inverse de $\frac{-4}{7}$ est égal à $\frac{7}{-4}$ (ou $-\frac{7}{4}$).

La règle de la division : la "petite" phrase à bien mémoriser

La division ne va pas se faire directement. Il va falloir transformer la division en une multiplication, en utilisant la règle fondamentale suivante (*c'est la petite phrase à mémoriser*) :

DIVISER par une fraction, c'est MULTIPLIER par l'INVERSE de cette fraction.

On visualise tout de suite cette règle :

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \boxed{\times} \boxed{\frac{7}{5}}$$

→ on a transformé la division en une multiplication

→ on a écrit l'inverse de $\frac{5}{7}$

Dans la pratique, cela signifie que :

- on ***ne change pas*** la première fraction (celle de gauche, ou celle du haut).
- on ***change*** la division en une multiplication.
- on écrit l'***INVERSE*** de la deuxième fraction (celle de droite, ou celle du bas).
- on conclut en effectuant la multiplication finale.

Un exemple fondamental

On a $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$

$$= \frac{2}{3} \boxed{\times} \frac{7}{5}$$

$$= \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$$

La division de deux fractions : des exemples

On va croiser sur cette fiche différentes situations de calculs. N'oubliez pas que dans un calcul fractionnaire où apparait juste un nombre, on rajoute 1 sous ce nombre afin de créer une fraction !

$$\frac{7}{3} : \frac{4}{5} = \frac{7}{3} \boxed{\times} \frac{5}{4} = \frac{7 \times 5}{3 \times 4} = \frac{35}{12}$$

on a inversé la fraction

$$\frac{2}{3} : \frac{-5}{7} = \frac{2}{3} \boxed{\times} \frac{7}{-5} = \frac{2 \times 7}{3 \times (-5)} = \frac{14}{-15} = -\frac{14}{15}$$

on a inversé la fraction

$$-\frac{4}{9} : \frac{-3}{-7} = \frac{-4}{9} \boxed{\times} \frac{-7}{-3} = \frac{-4 \times (-7)}{9 \times (-3)} = \frac{28}{-27} = -\frac{28}{27}$$

on a inversé la fraction

$$\frac{4}{1} : \frac{2}{3} = \frac{4}{1} \boxed{\times} \frac{3}{2} = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = \frac{12}{2}$$

on rajoute 1 — on a inversé la fraction

$$\frac{5}{3} : \frac{7}{1} = \frac{5}{3} \boxed{\times} \frac{1}{7} = \frac{5 \times 1}{3 \times 7} = \frac{5}{21}$$

on rajoute 1 — on a inversé la fraction

$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{8}{3} : \frac{4}{5} = \frac{8}{3} \boxed{\times} \frac{5}{4} = \frac{8 \times 5}{3 \times 4} = \frac{40}{12}$$

on a inversé la fraction.

$$\frac{9}{\frac{-2}{3}} = \frac{9}{1} : \frac{-2}{3} = \frac{9}{1} \boxed{\times} \frac{3}{-2} = \frac{9 \times 3}{1 \times (-2)} = \frac{27}{-2} = -\frac{27}{2}$$

on rajoute 1 — on a inversé la fraction.

Enchainement d'opérations avec les fractions

Toutes les règles sur les priorités opératoires sont également valable pour le calcul fractionnaire.
On fera donc l'ensemble des calculs fractionnaires en respectant l'ordre suivant :

- en premier, on fera les calculs entre ***parenthèses*** (s'il y en a, bien sûr !).
- ensuite, on fera les ***multiplications*** et les ***divisions.***
- et, enfin, on fera les ***additions*** et les ***soustractions.***

Je vous conseille de faire l'ensemble de ces calculs comme moi, c'est à dire, en colonne, avec les étapes de calculs écrites les unes en dessous des autres.

Et je ferai apparaitre, à chaque fois, sur cette fiche, l'opération prioritaire à effectuer en l'entourant.

Un exemple sans parenthèse

On veut calculer $\frac{2}{5} + \frac{7}{3} \times \frac{4}{5}$

On a $\frac{2}{5} + \frac{7}{3} \boxed{\times} \frac{4}{5}$

$= \frac{2}{5} + \frac{28}{15}$

$= \frac{2 \times 3}{5 \times 3} + \frac{28}{15} = \frac{6}{15} + \frac{28}{15} = \frac{34}{15}$

Un exemple avec des parenthèses

On veut calculer $(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}) : (\frac{2}{5} + \frac{3}{4})$

On a $(\frac{2}{3} \boxed{-} \frac{1}{4}) : (\frac{2}{5} \boxed{+} \frac{3}{4})$

$= (\frac{2 \times 4}{3 \times 4} - \frac{1 \times 3}{4 \times 3}) : (\frac{2 \times 4}{5 \times 4} - \frac{3 \times 5}{4 \times 5})$

$= (\frac{8}{12} - \frac{3}{12}) : (\frac{8}{20} + \frac{15}{20})$

$= \frac{5}{12} \boxed{:} \frac{23}{20}$

$= \frac{5}{12} \boxed{\times} \frac{20}{23} = \frac{100}{276} (= \frac{50}{138})(= \frac{25}{69})$

on a inversé la fraction

en simplifiant

Les problèmes faisant intervenir des fractions

Il va être impossible d'être exhaustif dans cette fiche qui aborde les problèmes.
L'ensemble des situations amenant à résoudre un problème avec les fractions est sans limite.
Il faut surtout s'habituer à lire les consignes. Car, en général, une bonne lecture de l'énoncé amène quasiment tout le temps une bonne résolution du problème.

Un exemple d'énoncé (où la réponse est une écriture fractionnaire)

J'ai trois chats dans ma maison, et je leur donne aujourd'hui leur nourriture dans la même assiette.
Le premier chat en mange le quart, le deuxième en mange les trois huitièmes.
a) Quelle fraction représente la partie mangée par les deux premiers chats ?
b) Quelle fraction représente ce qu'il reste pour le troisième chat ?

a) on fait une addition $\rightarrow \frac{1}{4}+\frac{3}{8}$

On obtient $\frac{1}{4}+\frac{3}{8} = \frac{1\times 2}{4\times 2}+\frac{3}{8} = \frac{2}{8}+\frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

Les deux premiers chats ont mangé $\frac{5}{8}$ du total.

b) Les $\frac{5}{8}$ du total ont déjà été mangés

Donc il reste $\frac{3}{8}$ au dernier chat.

Un autre exemple d'énoncé (où les réponses sont des nombres, avec une unité, ici "*des élèves*")

Les deux tiers des élèves d'un collège pratiquent un sport. Parmi ces élèves, les trois septièmes pratiquent un sport collectif, et les autres pratiquent un sport individuel.
Sachant qu'il y a 630 élèves dans ce collège, il faut calculer :
a) le nombre d'élèves pratiquant un sport.
b) le nombre d'élèves pratiquant un sport collectif.
c) le nombre d'élèves pratiquant un sport individuel.

a) on calcule $\frac{2}{3}$ de 630 élèves

$= \frac{2}{3} \times 630 = (2\times 630):3 = 420$ élèves

Donc il y a 420 élèves qui pratiquent un sport.

b) on calcule $\frac{3}{7}$ de 420 élèves

$= \frac{3}{7} \times 420 = (3\times 420):7 = 180$ élèves

Donc il y a 180 élèves qui font un sport collectif.

c) Il y a donc 240 élèves qui font un sport individuel. $\rightarrow (420 - 180 = 240)$