Comment montrer que deux fractions sont égales

Il y a globalement trois méthodes pour montrer que *deux fractions sont égales*. Mais je vais privilégier celle qui fonctionnera toujours, ***dans tous les cas***. Car nous allons voir que les deux autres méthodes peuvent être intéressantes mais il y a des situations pour lesquelles elles ne seront pas pertinentes.

La méthode pour montrer que deux fractions sont égales

Elle consiste à vérifier l'égalité des "*produits en croix*". On va donc avoir à faire des multiplications, et cette méthode ne sera donc jamais compliquée ou impossible à mettre en place.

Exemple 1 : est ce que l'on a $\dfrac{20}{35} \times \dfrac{24}{42}$?

On calcule $20 \times 42 = 840$ et $35 \times 24 = 840$.

Les résultats sont égaux donc on a $\dfrac{20}{35} = \dfrac{24}{42}$.

Exemple 2 : est ce que l'on a $\dfrac{40}{75} \times \dfrac{30}{85}$?

On calcule $40 \times 85 = 3400$ et $75 \times 30 = 2250$.

Les résultats ne sont pas égaux donc on a $\dfrac{40}{75} \neq \dfrac{30}{85}$.

Les autres méthodes (et leur limite d'utilisation)

Pour montrer que *deux fractions sont égales*, on pourrait *comparer leur écriture décimale*.

On a $\dfrac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$ et $\dfrac{15}{20} = 15 : 20 = 0{,}75$

Donc on a $\dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{20}$ $(= 0{,}75)$

MAIS si les fractions n'ont pas d'écriture décimale, on ne peut pas conclure avec des valeurs approchés.

On a $\dfrac{2}{3} \simeq 0{,}666\ldots$ → pas d'écriture décimale.

Cette méthode ne peut être utilisée pour montrer $\dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{21}$.

Pour montrer que *deux fractions sont égales*, on peut chercher par quel coefficient *multiplier le numérateur et le dénominateur* pour passer de l'une à l'autre.

On vérifie que $\dfrac{2}{3} \overset{\times 7}{\underset{\times 7}{=}} \dfrac{14}{21}$

MAIS ce coefficient n'est parfois pas un nombre décimal et il ne sera pas toujours évident à trouver.

Cette méthode trouve sa limite avec $\dfrac{3}{6}$ et $\dfrac{4}{8}$!

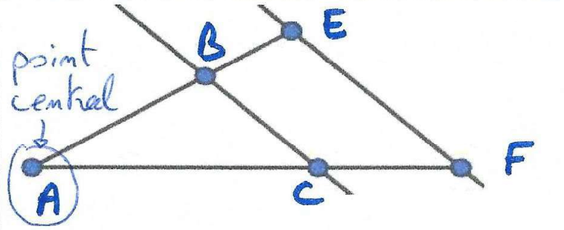
La réciproque de la propriété de Thalès

Comment montrer que deux droites sont parallèles (1)

Une fois que l'on a bien intégré le travail sur l'utilisation de la propriété de Thalès, on peut s'intéresser à sa réciproque. L'environnement général va être le même que pour la propriété directe MAIS :

- il ne faudra écrire que ***les deux rapports de longueurs qui partent du point central.***
- on ne cherche pas à calculer une longueur. Le but est de savoir si, oui ou non, des droites sont parallèles.
- on connaitra donc forcément les quatre longueurs des côtés qui partent du point central, et on vérifiera ***si les fractions correspondantes sont égales*** afin de savoir si les droites sont parallèles.
- le point central se repère comme dans la propriété directe. C'est le "*point d'intersection des points alignés*" ou "*le seul point qui n'est pas sur les droites éventuellement parallèles*".

Un exemple de référence



On donne : AB = 6 cm ; AE = 7,5 cm ; AC = 8 cm ; AF = 10 cm.
Les droites (BC) et (EF) sont elles parallèles ?

On vérifie que l'on a bien une figure "*ressemblant*" à une configuration de Thalès

Les points A, B, E et A, C, F sont alignés dans le même ordre.
A est le point central.

On écrit ***les deux rapports partant du point central*** et on remplace par les longueurs correspondantes.
Attention, on se pose bien ici la question de savoir si il y a égalité des fractions, oui ou non.

A t-on $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$? → A t-on $\frac{6}{7,5} = \frac{8}{10}$?

On vérifie si les *fractions sont égales*

On calcule $6 \times 10 = 60$ et $7,5 \times 8 = 60$
Les résultats sont égaux donc on a $\frac{6}{7,5} = \frac{8}{10}$.

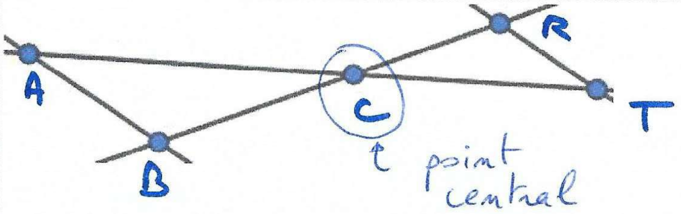
On peut maintenant conclure pour le *parallélisme*

On a bien l'égalité des rapports $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$
et d'après la réciproque de la propriété de Thalès,
on a $(BC) // (EF)$.

La réciproque de la propriété de Thalès
Comment montrer que deux droites sont parallèles (2)

Après avoir vu sur la fiche précédente un exemple avec *une configuration type 4e*, on va s'intéresser sur cette fiche à une *configuration type 3e*, c'est à dire "*en sablier*" ou en "*papillon*".
→ on en profite ici pour voir une petite subtilité sur les raisonnements.
Pour prouver que des droites sont parallèles, on sait que l'on utilise la réciproque de la propiété de Thalès.
Mais, ***dans la rédaction de la solution***, on n'écrit pas "D"après la réciproque ....." au début de la rédaction, mais bien à la fin, dans la conclusion.
De plus, si les droites ne sont pas parallèles, on n'écrit même rien ! En effet, dans la logique des raisonnements, ce n'est pas la réciroque de la propriété de Thalès qui nous permet de conclure au "*non parallélisme*" mais ça serait la ***contraposée*** de la propriété de Thalès.

Un exemple de référence



On donne CA = 42 cm ; CB = 35 cm ; CR = 20 cm ; CT = 24 cm.
Les droites (AB) et (RT) sont elles parallèles ?

On vérifie que l'on a bien une figure "*ressemblant*" à une configuration de Thalès

Les points A, C, T et B, C, R sont alignés dans le même ordre.
C est le point central.

On écrit ***les deux rapports partant du point central*** et on remplace par les longueurs correspondantes.
Attention, on se pose bien ici la question de savoir si il y a égalité des fractions, oui ou non.

A t-on $\frac{CR}{CB} = \frac{CT}{CA}$? →	A t-on $\frac{20}{35} = \frac{24}{42}$?

On vérifie si les *fractions sont égales*

On calcule $20 \times 42 = 840$ et $35 \times 24 = 840$
Les résultats sont égaux donc on a $\frac{20}{35} = \frac{24}{42}$

On peut maintenant conclure pour le *parallélisme*

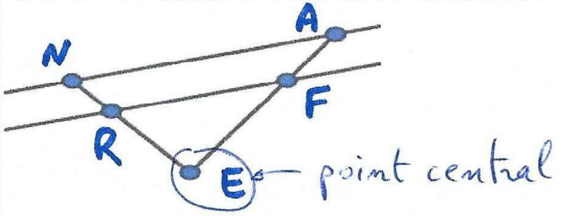
On a bien l'égalité des rapports $\frac{CR}{CB} = \frac{CT}{CA}$
et d'après la réciproque de la propriété de Thalès,
on a (AB) // (RT).

Comment montrer que deux droites ne sont pas parallèles (1)

Une fois que l'on a bien intégré le travail sur l'utilisation de la propriété de Thalès, on peut s'intéresser à sa réciproque. L'environnement général va être le même que pour la propriété directe MAIS :

- il ne faudra écrire que ***les deux rapports de longueurs qui partent du point central.***
- on ne cherche pas à calculer une longueur. Le but est de savoir si, oui ou non, des droites sont parallèles.
- on connaitra donc forcément les quatre longueurs des côtés qui partent du point central, et on vérifiera ***si les fractions correspondantes sont égales*** afin de savoir si les droites sont parallèles.
- le point central se repère comme dans la propriété directe. C'est le "*point d'intersection des points alignés*" ou "*le seul point qui n'est pas sur les droites éventuellement parallèles*".

Un exemple de référence



On donne : ER = 13 cm ; EN = 17 cm ; EF = 16 cm ; EA = 21 cm.
Les droites (RF) et (AN) sont elles parallèles ?

On vérifie que l'on a bien une figure "*ressemblant*" à une configuration de Thalès

Les points E, R, N et E, F, A sont alignés dans le même ordre.
E est le point central.

On écrit ***les deux rapports partant du point central*** et on remplace par les longueurs correspondantes.
Attention, on se pose bien ici la question de savoir si il y a égalité des fractions, oui ou non.

A t-on $\frac{ER}{EN} = \frac{EF}{EA}$? → A t-on $\frac{13}{17} = \frac{16}{21}$?

On vérifie si les *fractions sont égales*

On calcule $13 \times 21 = 273$ et $17 \times 16 = 272$

Les résultats ne sont pas égaux donc on a $\frac{13}{17} \neq \frac{16}{21}$.

On peut maintenant conclure pour le *parallélisme*

On a donc $\frac{ER}{EN} \neq \frac{EF}{EA}$.

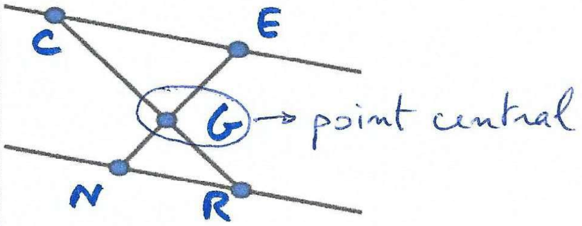
→ on n'a pas l'égalité des rapports.

→ les droites (RF) et (NA) ne sont pas parallèles.

Comment montrer que deux droites ne sont pas parallèles (2)

Après avoir vu sur la fiche précédente un exemple avec *une configuration type 4e*, on va s'intéresser sur cette fiche à une *configuration type 3e*, c'est à dire "*en sablier*" ou en "*papillon*".
→ on en profite ici pour voir une petite subtilité sur les raisonnements.
Pour prouver que des droites sont parallèles, on sait que l'on utilise la réciproque de la propiété de Thalès.
Mais, *dans la rédaction de la solution*, on n'écrit pas "D"après la réciproque ....." au début de la rédaction, mais bien à la fin, dans la conclusion.
De plus, si les droites ne sont pas parallèles, on n'écrit même rien ! En effet, dans la logique des raisonnements, ce n'est pas la réciroque de la propriété de Thalès qui nous permet de conclure au "*non parallélisme*" mais ça serait la ***contraposée*** de la propriété de Thalès.

Un exemple de référence



On donne GC = 43 cm ; GE = 36 cm ; GN = 21 cm ; GR = 25 cm.
Les droites (CE) et (NR) sont elles parallèles ?

On vérifie que l'on a bien une figure "*ressemblant*" à une configuration de Thalès

Les points C, G, R et E, G, N sont alignés dans le même ordre.
G est le point central.

On écrit ***les deux rapports partant du point central*** et on remplace par les longueurs correspondantes.
Attention, on se pose bien ici la question de savoir si il y a égalité des fractions, oui ou non.

A t'on $\frac{GN}{GE} = \frac{GR}{GC}$? →	A t'on $\frac{21}{36} = \frac{25}{43}$?

On vérifie si les *fractions sont égales*

On calcule $21 \times 43 = 903$ et $36 \times 25 = 900$.
Les résultats ne sont pas égaux donc on a $\frac{21}{36} \neq \frac{25}{43}$.

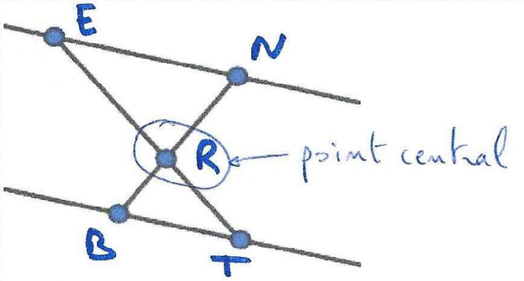
On peut maintenant conclure pour le *parallélisme*

On a donc $\frac{GN}{GE} \neq \frac{GR}{GC}$.
→ on n'a pas l'égalité des rapports.
→ les droites (CE) et (NR) ne sont pas parallèles.

Un exemple avec la propriété de Thalès et sa réciproque

Nous allons voir sur cette fiche un exercice qui nous amène à utiliser, avec la même configuration, la réciproque de la propriété de Thalès et la propriété directe.
La réciproque, avec les rapports partant du point central, nous sert à montrer un parallélisme de droites.
Et, une fois montré ce parallélisme, on pourra appliquer la propriété de Thalès afin de calculer une des longueurs concernant ces droites parallèles.

Un exemple de référence



On donne les longueurs TR = 2,8 cm ; RE = 7 cm ; BR = 2,4 cm ; NR = 6 cm ; EN = 7,4 cm

a) Montrons que les droites (TB) et (EN) sont parallèles ***b) Calculer la longueur TB***

a) On montre que (TB) // (EN)

Les points E, R, T et N, R, B sont alignés dans le même ordre.
R est le point central.

A t-on $\frac{RB}{RN} = \frac{RT}{RE}$? → A t-on $\frac{2,4}{6} = \frac{2,8}{7}$?

On calcule $2,4 \times 7 = 16,8$ et $6 \times 2,8 = 16,8$.

Les résultats sont donc égaux et on a $\frac{RB}{RN} = \frac{RT}{RN}$

→ on a l'égalité des rapports
→ d'après la réciproque de la propriété de Thalès, on a (TB) // (EN).

a) On calcule TB

On sait maintenant que (TB) // (EN).
Les points E, R, T et N, R, B sont alignés dans le même ordre.
R est le point central.
On peut appliquer la propriété de Thalès.

On a : $\frac{RB}{RN} = \frac{RT}{RE} = \frac{BT}{NE}$ → On a : $\frac{2,4}{6} = \frac{2,8}{7} = \frac{BT}{7,4}$

Calcul de BT : on utilise par exemple $\frac{2,8}{7} = \frac{BT}{7,4}$

→ $BT = (2,8 \times 7,4) : 7 = 2,96$ cm.