La loi binomiale : quelques énoncés du bac

Enoncé 1 (d'après Métropole 2018 exercice 2)

On interroge au hasard 40 habitants d'une ville, en admettant que cela correspond à des tirages successifs indépendants et avec remise.
On suppose que la probabilité qu'une personne soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées.
a) Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 15 personnes vaccinées parmi les 40 habitants ?
b) Quelle est la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinées ?

On reconnait une loi binomiale $\mathcal{B}(40\,;0,4)$
avec $n=40$ et $p=0,4$
a) on cherche $p(X=15) \approx 0,123$ (binomFdp)
b) on cherche $p(X \geq 20) = 1 - p(X \leq 19)$
$\approx 0,1298$ (binomFRep)

Enoncé 2 (d'après Nouvelle-Calédonie 2018 exercice 2)

Une épreuve de culture générale est donnée sous la forme d'un QCM de 20 questions.
Pour chaque question, il y a quatre réponses possibles , avec une seule qui est correcte.
Bruno répond au hasard à chacune des vingt questions.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses données par Bruno.
Quelle est la probabilité qu'il ait répondu juste à au moins la moitié des questions ?

On reconnait une loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;0,25)$
avec $n=20$ et $p=0,25$ (une chance sur quatre !)
On cherche $p(X \geq 10) = 1 - p(X \leq 9)$ (binomFRep)
$\approx 0,014$

Enoncé 3 (d'après Asie 2018 exercice 2)

On considère une maladie avec un test créé pour lequel la probabilité que ce test soit positif sur une personne prise au hasard est égale à 0,158. On fait un test auprès de n personnes et on souhaite que la probabilité qu'au moins un individu soit testé positivement soit supérieure ou égale à 0,99.

On reconnait une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;0,158)$.
On veut : $p(X \geq 1) \geq 0,99 \rightarrow 1 - p(X=0) \geq 0,99$
or $p(X=0) = \binom{n}{0} \times 0,158^0 \times (1-0,158)^n = 0,842^n$ car $\binom{n}{0} = 1$
On résout donc : $1 - 0,842^n \geq 0,99$
soit $0,842^n \leq 0,01 \rightarrow \ln(0,842^n) \leq \ln(0,01)$
$\rightarrow n \ln 0,842 \leq \ln 0,01 \rightarrow n \geq \boxed{\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,842}} \simeq 26,8$
Donc il faut au moins 27 personnes pour réaliser la condition.