

Epreuve de Bernoulli et schéma de Bernoulli

Loi binomiale

La définition d'une épreuve de Bernoulli

Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles.

L'une de ces issues sera appelée "*Succès*", avec une probabilité associée égale à p .

La deuxième issue sera appelée "*Echec*" avec une probabilité alors égale à $(1 - p)$.

Exemples :

- on lance un dé à six faces. L'événement "*obtenir un nombre pair*" pourrait correspondre à "*Succès*" et l'événement "*obtenir un nombre impair*" correspondrait donc à "*Echec*".

- dans l'industrie, si on fabrique des pièces métalliques, on peut considérer l'événement "*la pièce est sans défaut*" comme "*Succès*" et l'événement "*la pièce est avec un défaut*" correspondrait donc à "*Echec*".

La définition d'un schéma de Bernoulli

Si on répète un certain nombre de fois (n fois) une *épreuve de Bernoulli* de façon identique et indépendante, alors on obtient un *schéma de Bernoulli*.

Ces épreuves doivent bien se dérouler de façon identique (toujours dans les mêmes conditions) et de façon indépendante (le résultat obtenu sur une épreuve n'a aucune influence sur le résultat de l'épreuve suivante). Ainsi, les probabilités de succès et d'échec **restent les mêmes** pour chacune des épreuves.

Exemples :

- on lance un dé à six faces 20 fois de suite. Chaque lancer se réalise de façon identique (le dé ne se déforme pas, il reste le même) et indépendante (le résultat d'un lancer n'a aucune influence sur le résultat du lancer suivant).

- on effectue un tirage AVEC REMISE d'une boule dans une urne. Puisque l'on remet à chaque fois la boule tirée, les conditions sont inchangées et on aura bien des épreuves identiques et indépendantes.

La définition d'une loi binomiale

La *loi de probabilité* liée à une variable aléatoire X , s'intéressant au nombre de succès d'un schéma de Bernoulli à n épreuves, s'appelle une **loi binomiale**.

Une *loi binomiale* se définit avec deux paramètres :

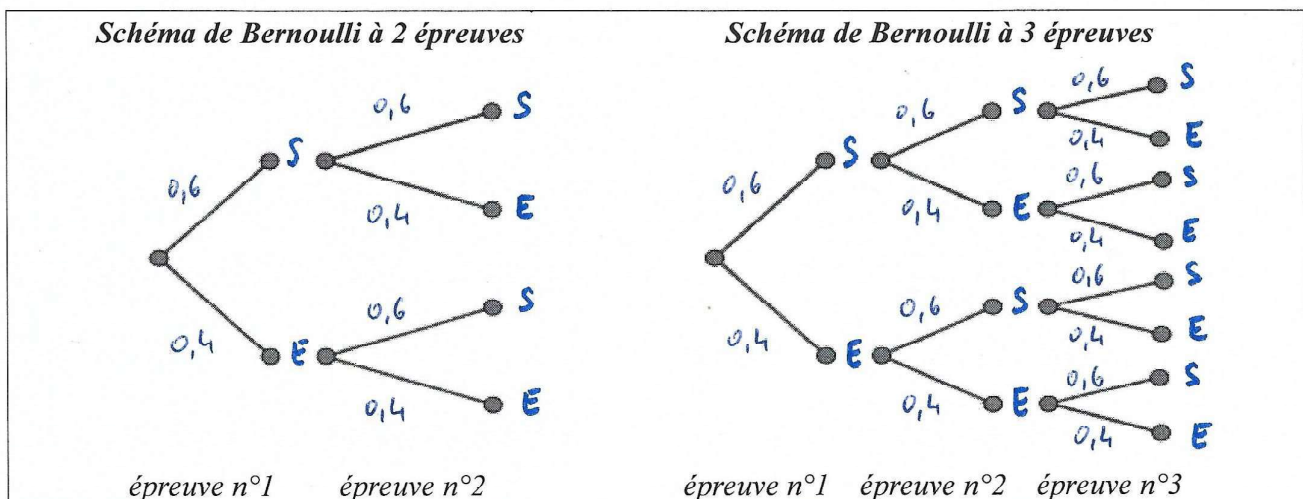
n qui est le nombre d'épreuves réalisées, et p qui est la probabilité de succès.

On écrira alors la loi binomiale sous la forme : $B(n; p)$.

Visualisation avec un arbre de probabilité

On va réaliser un arbre de probabilité d'un schéma de Bernoulli avec $n = 2$ épreuves, puis $n = 3$ épreuves.

On considèrera ici une probabilité de succès $p = 0,6$ et donc une probabilité de l'échec $(1 - p) = 0,4$.



La loi binomiale : quelques exemples

Cette fiche va servir à croiser des exemples de *loi binomiale*. Cela devrait vous permettre de bien vous habituer à reconnaître cette loi dans les énoncés, et surtout à bien identifier les paramètres n et p .

Exemple 1

Un sac contient 6 boules bleues et 4 boules rouges.
On tire *successivement* et *avec remise* trois boules.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

On a un tirage AVEC remise $\rightarrow$ chaque tirage se fait dans les mêmes conditions et de façon indépendante.

Il y a 2 issues possibles : "rouge" ou "bleu"

$\rightarrow$ on a donc une loi binomiale $B(3; 0,4)$

avec $n = 3$ (on fait 3 tirages)

et $p = 0,4$ (probabilité de tirer une boule rouge).

Exemple 2

Une chaîne de production fabrique 10 000 chemises par jour. La probabilité pour qu'une chemise soit considérée sans défaut est 0,9. On extrait de cette production successivement 10 chemises.
Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de chemises sans défaut dans cet échantillon de taille 10.

On peut assimiler cette situation à un tirage AVEC remise de 10 chemises parmi les 10 000.

Il y a 2 issues possibles : "sans défaut" ou "avec défaut"

$\rightarrow$ on a donc une loi binomiale $B(10; 0,9)$

avec $n = 10$ et $p = 0,9$.

Exemple 3 (d'après Bac S Centres étrangers 2019)

Une étude statistique a établi qu'un client sur quatre pratique le surf.
Dans une télécabine accueillant 80 clients de la station, on cherche la probabilité qu'il y ait exactement 20 clients pratiquant le surf.

On peut assimiler cette situation à un tirage AVEC remise de 80 clients parmi l'ensemble des clients.

Il y a 2 issues possibles : "surf" ou "pas surf"

$\rightarrow$ on a donc une loi binomiale $B(80; 0,25)$

avec $n = 80$ et $p = 0,25$ (un quart!)

et on cherchera $p(X = 20)$.

Comment calculer une probabilité du type $P(x = \dots)$ avec une loi binomiale

Pour calculer ces probabilités, il y a *trois possibilités*. Très rapidement, on utilisera exclusivement la dernière qui n'utilise que la calculatrice mais il est nécessaire de comprendre d'où viennent les résultats.

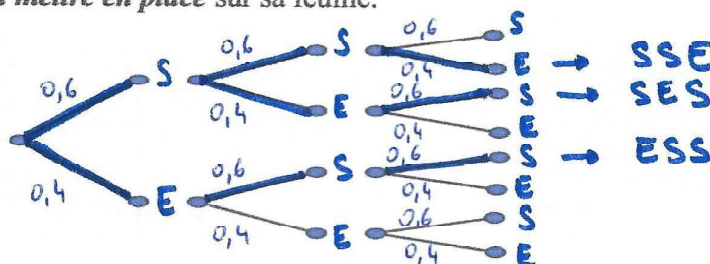
Un exemple d'énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,6$.
On cherche à calculer $P(x = 2)$, c'est à dire la probabilité d'obtenir exactement 2 succès sachant que l'épreuve a été répétée 3 fois.

Calcul de la probabilité "à la main"

Cela *serait* la meilleure méthode, car la plus compréhensible et la plus facile.

MAIS, dans la pratique, on va comprendre que faire un arbre de probabilité pour plus de 4 épreuves est *impossible à proprement et bien mettre en place* sur sa feuille.



On a surligné les chemins permettant d'obtenir exactement 2 succès.

$$\text{Donc : } P(X=2) = 0,6 \times 0,6 \times 0,4 + 0,6 \times 0,4 \times 0,6 + 0,4 \times 0,6 \times 0,6 = 0,432$$

Calcul avec la formule utilisant les coefficients binomiaux

La formule générale s'écrit :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

avec n : nombre total d'épreuves
 k : nombre de succès
 p : probabilité du succès

On applique cette formule à l'exemple de cette fiche.

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \times 0,6^2 \times (1-0,4)^{3-2} = \binom{3}{2} \times 0,6^2 \times 0,4^1$$

On peut vérifier que le coefficient binomiale correspond au nombre de chemins permettant d'avoir 2 succès. Mais, *ce coefficient se calcule à la calculatrice*. Par exemple, avec la Ti-83 Premium, on tapera successivement sur **math** - **PROB** - **Combinaison** et on affichera 3C_2 .

$$\text{Donc : } \binom{3}{2} = {}_3C_2 = 3 \rightarrow p(X=2) = 3 \times 0,6^2 \times 0,4^1 = 0,432$$

↑ nombre de chemins

Calcul à la calculatrice avec l'instruction "BinomFdp"

Il vous faut mémoriser les touches qui concernent VOTRE calculatrice.

Si on prend l'exemple de la Ti-83 Premium, on tapera successivement sur **2nde** ; **distrib** ; **BinomFdp** et on complète l'affichage de l'écran :

nbreEssais : 3
 p : 0,6
 Valeur de x : 2

$$\text{On obtient directement } p(X=2) = 0,432$$

Comment calculer une probabilité du type $P(x \leq \dots)$ avec une loi binomiale

On va ici utiliser la calculatrice avec une instruction très spécifique (*binomFrep*).

Mais il faudra être très vigilant au fait que la calculatrice est programmée pour répondre à la question " $P(x \leq \dots)$ " et il faudra adapter son travail si l'énoncé demande, par exemple, de calculer " $P(x > \dots)$ ".

Un exemple d'énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,6$.
On cherche à calculer $P(x \leq 4)$, c'est à dire la probabilité d'obtenir entre 0 et 4 succès sachant que l'épreuve a été répétée 10 fois.

Calcul à la calculatrice avec l'instruction "BinomFrep"

On va, pour ce type d'énoncé, écarter tout de suite les calculs "à la main".

Et, il serait très peu efficace (même si c'est possible) d'utiliser l'instruction "*BinomFdp*" pour calculer (et additionner) les probabilités $P(x = 0)$, $P(x = 1)$, $P(x = 2)$, $P(x = 3)$ et $P(x = 4)$.

Du coup, le plus efficace est d'utiliser l'instruction "*BinomFrep*" qui fait directement l'ensemble des calculs qui concernent le fait d'avoir entre 0 et 4 succès.

En prenant l'exemple de la Ti-83 Premium, on tapera successivement sur **2nde** ; **distrib** ; **BinomFrep** et on complète l'affichage de l'écran :

nbreEssais : 10
p : 0,6
Valeur de x : 4

On obtient : $P(x \leq 4) \approx 0,1662$

Comment bien adapter son calcul par rapport à l'énoncé

L'instruction "*Binomfrep*" ne répond qu'à la question $P(x \leq \dots)$, soit "inférieur ou égal". Mais les énoncés vont souvent demander une probabilité d'un autre type et il faudra bien adapter vos calculs !
On va garder, pour les exemples ci-dessous, les paramètres $n = 10$ et $p = 0,6$. Vous n'hésitez pas à vérifier que vous obtenez bien les bons résultats numériques !

Si l'énoncé demande calculer $P(x < 7)$, cela signifie "entre 0 et 6 succès"

→ on cherche donc $P(x \leq 6)$ et on utilise *binomFrep* avec Valeur de x : 6

On obtient : $P(x < 7) = P(x \leq 6) \approx 0,6177$

Si l'énoncé demande calculer $P(x > 5)$, cela signifie "entre 6 et 10 succès"

→ on doit utiliser l'événement contraire qui est $P(x \leq 5)$ et on utilise *binomFrep* avec Valeur de x : 5
puis on calcule : $1 - P(x \leq 5)$.

on obtient : $P(x > 5) = 1 - P(x \leq 5) \approx 0,6331$

Si l'énoncé demande calculer $P(x \geq 7)$, cela signifie "entre 7 et 10 succès"

→ on doit utiliser l'événement contraire qui est $P(x \leq 6)$ et on utilise *binomFrep* avec Valeur de x : 6
puis on calcule : $1 - P(x \leq 6)$.

On obtient : $P(x \geq 7) = 1 - P(x \leq 6) \approx 0,3823$

Si l'énoncé demande la probabilité d'avoir "au moins 4 succès", cela signifie "4 succès ou plus"

→ cela correspond à $P(x \geq 4)$ et on calcule donc : $1 - P(x \leq 3)$.

on obtient : $P(x \geq 4) = 1 - P(x \leq 3) \approx 0,9452$

Si l'énoncé demande la probabilité d'avoir "au plus 3 succès", cela signifie "3 succès ou moins"

→ cela correspond directement à $P(x \leq 3)$.

on obtient : $P(x \leq 3) \approx 0,0548$

Comment bien exploiter une loi binomiale

On va, sur cette fiche, traiter deux énoncés qui vont nous permettre d'exploiter la loi binomiale, en découvrant une situation qui va nous amener à découvrir une nouvelle instruction de la calculatrice, et une situation qui va faire un lien avec les résolutions d'inéquations.

L'instruction "invBinom" : un exemple d'énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,6$.
On cherche, à partir de combien de succès k , la probabilité $P(X \leq k)$ est au moins égale à $0,9$ soit 90% .

On cherche à retrouver un nombre de succès, il faut reconnaître l'utilisation de l'instruction "invBinom".
En prenant l'exemple de la Ti-83 Premium, on tapera successivement sur **2nde ; distrib ; invBinom** et on complète l'affichage de l'écran :

aire : 0,9
nbreEssais : 20
p : 0,6

→ on obtient : $k = 15$

Ce résultat signifie qu'à partir de cette valeur 15 , on est sûr d'avoir $P(X \leq k)$ au moins égale à $0,9$.

On peut maintenant vérifier ce résultat à l'aide de l'instruction "BinomFrep".

En effet, avec les mêmes paramètres, on obtient :
 $P(X \leq 14) \approx 0,874$
 $P(X \leq 15) \approx 0,949$

Et on peut aussi vérifier que $P(X \leq 16)$, $P(X \leq 17)$, ...etc., sont bien supérieures à $0,9$.

Une résolution d'inéquation : un exemple d'énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n inconnue et $p = 0,286$.
On cherche la plus petite valeur de n (soit le nombre minimal d'épreuve) pour que la probabilité d'obtenir au moins un succès soit supérieure à $0,99$ (soit 99%).

On va retranscrire cet énoncé sous une formulation plus "mathématiques" :

On cherche le nombre d'épreuves n pour que $P(X \geq 1) > 0,99$.

Or, on sait, qu'avec les événements contraires, on a $P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 0)$.

Mais il se trouve que $P(X \leq 0) = P(X = 0)$, car la variable X ne peut pas prendre de valeurs négatives.

On utilise alors la formule utilisant les coefficients binomiaux :

$$P(X=0) = \binom{n}{0} \times 0,286^0 \times (1-0,286)^{n-0} \quad \text{avec } \binom{n}{0} = 1$$
$$= 1 \times 1 \times 0,714^n = 0,714^n$$

On veut donc résoudre l'inéquation : $1 - 0,714^n > 0,99$, c'est à dire $0,714^n < 0,01$

On peut alors : soit utiliser un tableau de valeurs pour voir quand $0,714^n$ devient inférieur à $0,01$.
soit, après avoir étudié la fonction $\ln$, effectuer directement la résolution

$$0,714^n < 0,01$$
$$\rightarrow \ln(0,714^n) < \ln(0,01)$$
$$\rightarrow n \times \ln(0,714) < \ln(0,01)$$
$$\rightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,714)} \quad \text{avec } \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,714)} \approx 13,67$$

inversion du signe car $\ln(0,714)$ est négatif

Donc il faut que le nombre d'épreuves soit supérieur ou égal à 14 (car c'est forcément un entier).

L'espérance mathématique d'une loi binomiale

Pour une loi binomiale $B(n; p)$, on a :

$$E(x) = n \times p$$

L'écart type d'une loi binomiale

Pour une loi binomiale $B(n; p)$, on a :

$$\sigma(x) = \sqrt{n p (1 - p)}$$

Un exemple d'énoncé

Un contrôle de qualité a montré qu'un article produit par une entreprise était défectueux avec une probabilité de 0,05 (soit 5%).

Un magasin a commandé 80 articles et on note X la variable aléatoire qui va correspondre au nombre d'articles défectueux (et donc invendables).

Calculs :

On reconnaît une loi binomiale $B(80; 0,05)$
avec $n = 80$ et $p = 0,05$.

On obtient : $E(x) = 80 \times 0,05 = 4$ articles
et $\sigma(x) = \sqrt{80 \times 0,05 \times 0,95} \approx 1,9$ articles.

Interprétation :

Pour une commande de 80 articles ,
le magasin peut "espérer" avoir une moyenne de
4 articles défectueux (et donc 76 articles vendables!).

Application :

Le magasin achète chaque article 6 euros à l'entreprise et elle prévoit une marge de 1,2 euros sur chaque article vendu. Quel bénéfice peut espérer gagner l'entreprise dans cette situation ?

Le magasin achète pour 480 € (80×6 €)
Il peut espérer vendre 76 articles, à un prix de
7,2 € (avec la marge), soit $76 \times 7,2$ € = 547,2 €
Donc le bénéfice espéré est égal à :
 $547,2 - 480 = 67,2$ €

La loi binomiale : quelques énoncés du bac

Énoncé 1 (d'après Métropole 2018 exercice 2)

On interroge au hasard 40 habitants d'une ville, en admettant que cela correspond à des tirages successifs indépendants et avec remise.

On suppose que la probabilité qu'une personne soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées.

- Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 15 personnes vaccinées parmi les 40 habitants ?
- Quelle est la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinées ?

On reconnaît une loi binomiale $B(40; 0,4)$

avec $n = 40$ et $p = 0,4$

a) on cherche $P(X = 15) \approx 0,123$ (binomFdp)

b) on cherche $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) \approx 0,1298$ (binomFRep)

Énoncé 2 (d'après Nouvelle-Calédonie 2018 exercice 2)

Une épreuve de culture générale est donnée sous la forme d'un QCM de 20 questions.

Pour chaque question, il y a quatre réponses possibles, avec une seule qui est correcte.

Bruno répond au hasard à chacune des vingt questions.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses données par Bruno.

Quelle est la probabilité qu'il ait répondu juste à au moins la moitié des questions ?

On reconnaît une loi binomiale $B(20; 0,25)$

avec $n = 20$ et $p = 0,25$ (une chance sur quatre !)

On cherche $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 0,014$ (binomFRep)

Énoncé 3 (d'après Asie 2018 exercice 2)

On considère une maladie avec un test créé pour lequel la probabilité que ce test soit positif sur une personne prise au hasard est égale à 0,158. On fait un test auprès de n personnes et on souhaite que la probabilité qu'au moins un individu soit testé positivement soit supérieure ou égale à 0,99.

On reconnaît une loi binomiale $B(n; 0,158)$.

On veut : $P(X \geq 1) \geq 0,99 \rightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,99$

or $P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,158^0 \times (1 - 0,158)^n = 0,842^n$ car $\binom{n}{0} = 1$

On résout donc : $1 - 0,842^n \geq 0,99$

soit $0,842^n \leq 0,01 \rightarrow \ln(0,842^n) \leq \ln(0,01)$

$\rightarrow n \ln 0,842 \leq \ln 0,01 \rightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,842} \approx 26,8$

Donc il faut au moins 27 personnes pour réaliser la condition.