Comment bien exploiter une loi binomiale

On va, sur cette fiche, traiter deux énoncés qui vont nous permettre d'exploiter la loi binomiale, en découvrant une situation qui va nous amener à découvrir une nouvelle instruction de la calculatrice, et une situation qui va faire un lien avec les résolutions d'inéquations.

L'instruction "invBinom" : un exemple d'énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}6$.
On cherche, à partir de combien de succès *k*, la probabilité $P(x \leqslant k)$ est au moins égale à 0,9 soit 90 %.

On cherche à retrouver un nombre de succès, il faut reconnaitre l'utilisation de l'instruction "*invBinom*".
En prenant l'exemple de la Ti-83 Premium, on tapera successivement sur ***2nde* ; *distrib* ; *invBinom***
et on complète l'affichage de l'écran :

aire : 0,9
nbreEssais : 20
p : 0,6

→ on obtient : $k = 15$

Ce résultat signifie qu'à partir de cette valeur 15, on est sûr d'avoir $P(x \leqslant k)$ au moins égale à 0,9.
On peut maintenant vérifier ce résultat à l'aide de l'instruction "*BinomFrep*".
En effet, avec les mêmes paramètres, on obtient : $P(x \leqslant 14) \approx 0{,}874$
$P(x \leqslant 15) \approx 0{,}949$

Et on peut aussi vérifier que $P(x \leqslant 16)$, $P(x \leqslant 17)$, ..etc.., sont bien supérieures à 0,9.

Une résolution d'inéquation : un exemple d'énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres *n inconnue* et $p = 0{,}286$.
On cherche la plus petite valeur de *n* (soit le nombre minimal d'épreuve) pour que la probabilité d'obtenir au moins un succès soit supérieure à 0,99 (soit 99 %).

On va retranscrire cet énoncé sous une formulation plus "mathématiques" :

On cherche le nombre d'épreuves *n* pour que $P(X \geqslant 1) > 0{,}99$.

Or, on sait, qu'avec les événements contraires, on a $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X \leqslant 0)$.
Mais il se trouve que $P(X \leqslant 0) = P(X = 0)$, car la variable X ne peut pas prendre de valeurs négatives.

On utilise alors la formule utilisant les coefficients binomiaux :

$$P(X=0) = \binom{n}{0} \times 0{,}286^0 \times (1-0{,}286)^{n-0} \quad \text{avec } \binom{n}{0} = 1$$
$$= 1 \times 1 \times 0{,}714^n = 0{,}714^n$$

On veut donc résoudre l'inéquation : $1 - 0{,}714^n > 0{,}99$, c'est à dire $0{,}714^n < 0{,}01$

On peut alors: soit utiliser un tableau de valeurs pour voir quand $0{,}714^n$ devient inférieur à 0,01.
soit, après avoir étudié la fonction *ln*, effectuer directement la résolution

$$0{,}714^n < 0{,}01$$
$$\to \ln(0{,}714^n) < \ln(0{,}01)$$
$$\to n \times \ln(0{,}714) < \ln(0{,}01)$$
$$\to n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}714)} \quad \text{avec } \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}714)} \approx 13{,}67$$

inversion du signe car $\ln(0{,}714)$ est négatif

Donc il faut que le nombre d'épreuves soit supérieur ou égal à 14 (car c'est forcément un entier).