Notion de variable aléatoire – Loi de probabilité

Définition

En classe de Première, on sait déjà calculer des probabilités dans beaucoup de situations différentes.
La notion de *variable aléatoire* va apparaitre lorsque l'on va associer ***les événements de cette expérience aléatoire*** à des ***nombres réels*** (qui seront des euros dans de nombreux exemples).

Un exemple de variable aléatoire

On considère un sac dans lequel on place 10 jetons (1 jeton rouge, 2 jetons bleus et 7 jetons verts).
On associe alors les événements de cette expérience aléatoire à des ***gains*** (ou à des ***pertes***).

Si on tire un jeton rouge , alors on ***gagne*** 9 euros.	Si on tire un jeton bleu, alors on ***gagne*** 4 euros.	Si on tire un jeton vert, alors on ***perd*** 3 euros.

On parlera de gains algébriques pour signifier que le gain peut être négatif (et c'est alors une perte).

On va donc définir une VARIABLE ALÉATOIRE qui associe, à la COULEUR du jeton, le GAIN algébrique correspondant.
Les valeurs prises par la variable aléatoire sont :

-3 ; 4 ; 9
(perte de 3 euros) (gain de 4 euros) (gain de 9 euros)

On peut alors définir des probabilités liées à différentes valeurs prises par la variable aléatoire.

On a : $p(X=-3) = \frac{7}{10} = 0,7$ → c'est la probabilité de perdre 3 euros, c'est à dire de tirer un jeton vert.
On a : $p(X=4) = \frac{2}{10} = 0,2$ → c'est la probabilité de gagner 4 euros, c'est à dire de tirer un jeton bleu.
On a : $p(X=9) = \frac{1}{10} = 0,1$ → c'est la probabilité de gagner 9 euros, c'est à dire de tirer un jeton rouge.

La loi de probabilité de cette variable aléatoire

Cette ***loi de probabilité*** va résumer l'ensemble des probabilités obtenues pour CHACUNE des valeurs de la variable aléatoire (il faudra donc parfaitement lister ces valeurs).
On aura, *sur la première ligne du tableau*, les différentes valeurs (x_i) prises par la variable aléatoire X.
On aura, *sur la deuxième ligne*, les probabilités (p_i) correspondantes à chaque valeur de la variable (ces probabilités seront le plus souvent notées en écriture décimale).

Variable aléatoire x_i *(en euros)*	(x_1) -3	(x_2) 4	(x_3) 9
Probabilités p_i	(p_1) $0,7$	(p_2) $0,2$	(p_3) $0,1$

On peut vérifier ici cette propriété : ***la somme de toutes les probabilités (p_i) doit être égale à 1.***

→ on a bien $p_1 + p_2 + p_3 = 0,7 + 0,3 + 0,1 = 1$

Comment déterminer une loi de probabilité : exemple 1

Enoncé de la situation
On lance un dé équilibré comportant 6 faces.
Si la face indique un nombre impair , alors on perd 5 euros.
Sinon, on gagne la valeur en euros du numéro de la face.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le gain algébrique à ce jeu .

Les valeurs prises par la variable aléatoire sont :

-5 ; 2 ; 4 ; 6

on obtient un nombre impair → on perd 5 €	on obtient 2 → on gagne 2 €	on obtient 4 → on gagne 4 €	on obtient 6 → on gagne 6 €

On a : $p(X=-5)=\frac{3}{6}$ (soit 3 chances sur 6)

→ c'est la probabilité de perdre cinq euros, c'est à dire d'obtenir un nombre impair avec le dé.

On a : $p(X=2)=\frac{1}{6}$ (soit 1 chance sur 6)

→ c'est la probabilité de gagner deux euros, c'est à dire d'obtenir le nombre 2 avec le dé.

On a : $p(X=4)=\frac{1}{6}$ (soit 1 chance sur 6)

→ c'est la probabilité de gagner quatre euros, c'est à dire d'obtenir le nombre 4 avec le dé.

On a : $p(X=6)=\frac{1}{6}$ (soit 1 chance sur 6)

→ c'est la probabilité de gagner six euros, c'est à dire d'obtenir le nombre 6 avec le dé.

La loi de probabilité s'écrira :

Variable aléatoire x_i	-5	2	4	6
Probabilités p_i	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

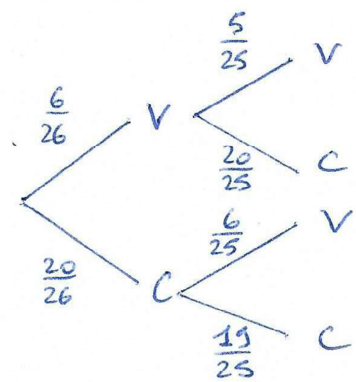
Comment déterminer une loi de probabilité : exemple 2

Enoncé de la situation
Un sac contient 26 jetons marqués avec les 26 lettres de l'alphabet.
On tire un premier jeton , puis un second jeton SANS remettre le premier dans l'urne.
On gagne 5 euros par voyelle tirée , et on perd 1 euro par consonne tirée.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le gain algébrique à ce jeu .

Les valeurs prises par la variable aléatoire sont :

-2	;	4	;	10
on a tiré deux consonnes		on a tiré une voyelle et une consonne		on a tiré deux voyelles

On peut s'aider avec un arbre de probabilité (V = tirer une voyelle ; C = tirer une consonne) .



Au premier tirage, on a 6 voyelles et 20 consonnes.
Donc on a $p(\text{V}) = \dfrac{6}{26}$ et $p(\text{C}) = \dfrac{20}{26}$.

Au deuxième tirage, sachant qu'*il n'y a pas eu de remise* :
- si une voyelle a déjà été tiré,
il reste 5 voyelles et 20 consonnes, soit $p(\text{V}) = \dfrac{5}{25}$ et $p(\text{C}) = \dfrac{20}{25}$.
- si une consonne a déjà été tiré,
il reste 6 voyelles et 19 consonnes, soit $p(\text{V}) = \dfrac{6}{25}$ et $p(\text{C}) = \dfrac{19}{25}$.

On a : $p(X=-2) = \dfrac{20}{26} \times \dfrac{19}{25} = \dfrac{38}{65}$ → c'est la probabilité de perdre 2 euros, donc de tirer deux consonnes.

On a : $p(X=4) = \dfrac{6}{26} \times \dfrac{20}{25} + \dfrac{20}{26} \times \dfrac{6}{25} = \dfrac{24}{65}$ → c'est la probabilité de gagner 4 euros, donc de tirer une consonne et une voyelle.

On a : $p(X=10) = \dfrac{6}{26} \times \dfrac{5}{25} = \dfrac{3}{65}$ → c'est la probabilité de gagner 10 euros, donc de tirer deux voyelles.

La loi de probabilité s'écrira :

Variable aléatoire x_i	-2	4	10
Probabilités p_i	$\dfrac{38}{65}$	$\dfrac{24}{65}$	$\dfrac{3}{65}$

Comment calculer l'espérance mathématique d'une loi de probabilité

Définition

Lorsque l'on connait la loi de probabilité d'une variable aléatoire X avec un tableau du type

Variable aléatoire x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_n
Probabilités p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

on pourra calculer l'*espérance mathématique* E (X) avec la formule suivante :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n$$

"sigma" qui correspond à faire la somme pour les indices de 1 à n

Exemple

On reprend la situation avec 10 jetons dans un sac (1 jeton rouge, 2 jetons bleus et 7 jetons verts).

Si on tire un jeton rouge , alors on ***gagne*** 9 euros.	Si on tire un jeton bleu, alors on ***gagne*** 4 euros.	Si on tire un jeton vert, alors on ***perd*** 3 euros.

On note X la variable aléatoire qui nous donne le gain (algébrique) correspondant à la couleur du jeton.

Les valeurs prises par la variable aléatoire sont : -3 ; 4 ; 9

On a : $p(X=-3) = \frac{7}{10} = 0{,}7$; $p(X=4) = \frac{2}{10} = 0{,}2$; $p(X=9) = \frac{1}{10} = 0{,}1$

(jeton vert) (jeton bleu) (jeton rouge)

La loi de probabilité s'écrira :

Variable aléatoire x_i	-3	4	9
Probabilités p_i	$0{,}7$	$0{,}2$	$0{,}1$

On calcule l'espérance mathématique :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$$
$$= -3 \times 0{,}7 + 4 \times 0{,}2 + 9 \times 0{,}1 = -0{,}4 \text{ (euros)}$$

Conséquences :

→ L'espérance mathématique est ici égale à - 0,4 euros. Cela signifie que *le jeu n'est pas **équitable*** (le gain pour le joueur est négatif et le jeu est *défavorable* pour le joueur , et donc *favorable* à l'organisateur).

→ Au moment de jouer une partie, le joueur a une *espérance* de gain égale à - 0,4 euros.
Cela ne veut pas dire que le joueur perdra à chaque fois 0,4 euros. Ce gain ne correspond pas à une réalité, cela correspond plutôt à une *moyenne sur un très grand nombre de parties*.
Mais le joueur peut aussi jouer trois parties et gagner 9 euros à chaque fois !

→ Donc, si il y a 10 000 joueurs qui jouent, chacun aura une *espérance* égale à - 0,4 euros.
Pour la totalité des joueurs, cela amène une *espérance* de gain égal à 10 000 × (- 0,4) = - 4 000 euros.
L'organisateur peut donc espérer gagner en moyenne 4 000 euros, si il y a 10 000 joueurs !!

La propriété de linéarité de l'espérance mathématique

La propiété

Voici cette propriété de linéarité énoncée avec sa formule générale

Pour tout nombre a et b réels, on aura $E(ax+b) = a\,E(x)+b$

On peut rapidement résumer cette propriété avec des exemples tirés de situations concrètes :

- si un organisateur décide de multiplier les gains d'un jeu par 2 , alors l'*espérance* (et donc la *moyenne* des gains) sera également multipliée par 2.
- si un organisateur décide d'ajouter 5 euros aux gains d'un jeu , alors l'*espérance* (et donc la *moyenne* des gains) sera également augmentée de 5 euros.

Exemple

Le mieux est de voir un exemple pour lequel on va appliquer cette propriété de linéarité, tout en faisant une vérification, en calculant directement l'espérance mathématique.

On reprend la situation avec 10 jetons dans un sac (1 jeton rouge, 2 jetons bleus et 7 jetons verts).

Si on tire un jeton rouge , alors on ***gagne*** 9 euros.	Si on tire un jeton bleu, alors on ***gagne*** 4 euros.	Si on tire un jeton vert, alors on ***perd*** 3 euros.

On note X la variable aléatoire qui nous donne le gain (algébrique) correspondant à la couleur du jeton.

Dans une fiche précédente , on a vu que l'espérance était alors égale à – 0,4 euros.

On va considérer alors que l'organisateur décide de multiplier les gains de son jeu par 3 , tout en ajoutant 1 euro de prime.

→ on va appliquer la propriété de linéarité

La nouvelle variable aléatoire sera définie par : $3X+1$

On pourra alors écrire $E(3X+1) = 3E(X)+1$

L'espérance du jeu devient $3\times(-0{,}4)+1 = -0{,}2$ euros

→ le jeu reste favorable pour l'organisateur.

→ on peut vérifier ce résultat en écrivant la loi de probabilité correspondante à cette nouvelle situation

Les nouvelles valeurs prises par la variable aléatoire sont :

28 (qui correspond à 3×9 € + 1 €)

13 (qui correspond à 3×4 € + 1 €)

-8 (qui correspond à $3\times(-3$ €$)$ + 1 €)

On a : $p(X=-8) = \frac{7}{10} = 0{,}7$; $p(X=13) = \frac{2}{10} = 0{,}2$; $p(X=28) = \frac{1}{10} = 0{,}1$

(jeton vert) (jeton bleu) (jeton rouge)

La loi de probabilité sécrira

Variable aléatoire x_i	-8	13	28
Probabilités p_i	0,7	0,2	0,1

On calcule alors l'espérance mathématique

$$E(X) = -8\times 0{,}7 + 13\times 0{,}2 + 28\times 0{,}1 = -0{,}2 \text{ (euros)}$$

Espérance mathématique : comment tenir compte d'une mise (1)

Nous avons ici trois fiches qui s'intéressent à un jeu d'argent pour lequel il y a une mise de départ. L'intérêt va être de savoir, pour chaque situation, si le jeu est *équitable* mais surtout jusqu'à quel point il est *défavorable* pour le joueur (et donc *favorable* pour l'organisateur, car ne soyons pas naïf , un organisateur ne mettra en place un jeu que si il a "*l'espoir*" de gagner de l'argent).
On verra, au final, trois situations qui permettent de balayer l'ensemble des possibilités :

- on intègre la mise dans les valeurs de gains dès le départ.
- on ne tient pas compte de la mise au départ et elle ne conditionnera que la conclusion en lien avec l'espérance.
- on cherche quel(s) gain(s) il faudrait proposer afin d'avoir un jeu équitable .

Application 1 : ***on tient compte d'une mise initiale pour les valeurs de la variable aléatoire.***

On prend une situation avec 10 jetons dans un sac (1 jeton rouge, 2 jetons bleus et 7 jetons verts).

Si on tire un jeton rouge , alors on ***gagne*** 15 euros.	Si on tire un jeton bleu, alors on ***gagne*** 2 euros.	Si on tire un jeton vert, alors on ***gagne*** 0 euros.

On participe au jeu en payant (*en misant*) une somme de 2 euros.

On note X la variable aléatoire qui nous donne le gain obtenu *en tenant compte de la mise* .

En enlevant la mise de 2 euros, on obtient les valeurs prises par la variable aléatoire : -2 ; 0 ; 13

$(0-2=2€)$ $(2-2=0€)$ $(15-2=13€)$

On a : $p(X=-2)=\frac{7}{10}=0,7$; $p(X=0)=\frac{2}{10}=0,2$; $p(X=13)=\frac{1}{10}=0,1$

(jeton vert) (jeton bleu) (jeton rouge)

On obtient la loi de probabilité suivante :

Variable aléatoire x_i	-2	0	13
Probabilités p_i	$0,7$	$0,2$	$0,1$

On calcule l'espérance mathématique de cette variable aléatoire :

$$E(X)=-2\times 0,7+0\times 0,2+13\times 0,1=-0,1 \text{ euros}$$

Conclusion :

Pour que le jeu soit ici équitable, il faudrait que $E(X)=0$.
Donc le jeu n'est pas équitable.
L'espérance (de gain) est ici inférieure à zéro, donc le jeu est défavorable au joueur et favorable pour l'organisateur.

Espérance mathématique : comment tenir compte d'une mise (2)

Nous avons ici trois fiches qui s'intéressent à un jeu d'argent pour lequel il y a une mise de départ.
L'intérêt va être de savoir, pour chaque situation, si le jeu est *équitable* mais surtout jusqu'à quel point il est *défavorable* pour le joueur (et donc *favorable* pour l'organisateur, car ne soyons pas naïf , un organisateur ne mettra en place un jeu que si il a "*l'espoir*" de gagner de l'argent).
On verra, au final, trois situations qui permettent de balayer l'ensemble des possibilités :

- on intègre la mise dans les valeurs de gains dès le départ.
- on ne tient pas compte de la mise au départ et elle ne conditionnera que la conclusion en lien avec l'espérance.
- on cherche quel(s) gain(s) il faudrait proposer afin d'avoir un jeu équitable .

Application 2 : ***on ne tient compte de la mise qu'au moment de la conclusion.***

On prend une situation avec 10 jetons dans un sac (1 jeton rouge, 2 jetons bleus et 7 jetons verts).

Si on tire un jeton rouge , alors on ***gagne*** 15 euros.	Si on tire un jeton bleu, alors on ***gagne*** 2 euros.	Si on tire un jeton vert, alors on ***gagne*** 0 euros.

On participe au jeu en payant (*en misant*) une somme de 2 euros.

On note X la variable aléatoire qui nous donne le gain obtenu *sans tenir compte de la mise* .

Sans tenir compte de la mise, on obtient les valeurs prises par la variable aléatoire : 0 ; 2 ; 15

On a : $p(X=0)=\frac{7}{10}=0,7$; $p(X=2)=\frac{2}{10}=0,2$; $p(X=15)=\frac{1}{10}=0,1$

(jeton vert) (jeton bleu) (jeton rouge)

On obtient la loi de probabilité suivante :

Variable aléatoire x_i	0	2	15
Probabilités p_i	0,7	0,2	0,1

On calcule l'espérance mathématique de cette variable aléatoire :

$E(X) = 0\times 0,7 + 2\times 0,2 + 15\times 0,1 = 1,9$ euros

Conclusion :

Pour que le jeu soit équitable, il faudrait ici que $E(X)=2$, car c'est la valeur de la mise.
Donc le jeu n'est pas équitable.
L'espérance (de gain) est inférieure à la mise, donc le jeu est défavorable au joueur et favorable pour l'organisateur.

Espérance mathématique : comment tenir compte d'une mise (3)

Nous avons ici trois fiches qui s'intéressent à un jeu d'argent pour lequel il y a une mise de départ. L'intérêt va être de savoir, pour chaque situation, si le jeu est *équitable* mais surtout jusqu'à quel point il est *défavorable* pour le joueur (et donc *favorable* pour l'organisateur, car ne soyons pas naïf , un organisateur ne mettra en place un jeu que si il a "*l'espoir*" de gagner de l'argent).
On verra, au final, trois situations qui permettent de balayer l'ensemble des possibilités :

- on intègre la mise dans les valeurs de gains dès le départ.
- on ne tient pas compte de la mise au départ et elle ne conditionnera que la conclusion en lien avec l'espérance.
- on cherche quel(s) gain(s) il faudrait proposer afin d'avoir un jeu équitable

Application 3 : ***on cherche une valeur de gain afin d'avoir un jeu équitable.***

On prend une situation avec 10 jetons dans un sac (1 jeton rouge, 2 jetons bleus et 7 jetons verts).

Si on tire un jeton rouge , alors on ***gagne*** x euros.	Si on tire un jeton bleu, alors on ***gagne*** 2 euros.	Si on tire un jeton vert, alors on ***gagne*** 0 euros.

On participe au jeu en payant (*en misant*) une somme de 2 euros.

On note X la variable aléatoire qui nous donne le gain obtenu *sans tenir compte de la mise* .

Les valeurs prises par la variable aléatoire sont : $0 ; 2 ; x$

On a : $p(X=0)=\frac{7}{10}=0,7$; $p(X=2)=\frac{2}{10}=0,2$; $p(X=x)=\frac{1}{10}=0,1$
(jeton vert) (jeton bleu) (jeton rouge)

On obtient la loi de probabilité suivante :

Variable aléatoire x_i	0	2	x
Probabilités p_i	0,7	0,2	0,1

On calcule l'espérance mathématique de cette variable aléatoire :

$E(X)=0\times 0,7+2\times 0,2+x\times 0,1=0,1x+0,4$

Conclusion :

Pour avoir un jeu équitable, il faut que $E(X)=2$, car c'est la valeur de la mise.
On résout donc l'équation : $0,1x+0,4=2$
$\rightarrow x=16$

Donc il faut un gain de 16 euros avec le jeton rouge pour avoir un jeu équitable.

Comment calculer la variance et l'écart type d'une loi de probabilité

La *variance* et l'*écart type* sont des indicateurs de *dispersion*.
Ils permettent de mesurer l'homogénéité ou l'hétérogénéité des valeurs prises par une variable aléatoire.
Dans le cadre d'un jeu, on dira que "***plus l'écart type est grand, plus le jeu est risqué***".

Lien entre variance et écart type

L'écart type ne se calcule pas directement. Pour l'obtenir, il nous faut d'abord calculer la variance V(X) de la variable aléatoire et , ensuite, l'écart type σ (X) sera égal à la *racine carrée de la variance*.

On calcule $V(X)$, et on a $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Calcul de la variance (et donc de l'écart type)

Il est utile de faire au moins une fois ces calculs "à la main". Cela permet de donner du sens à ces indicateurs. Etant entendu que par la suite, la calculatrice nous donnera très efficacement ces réponses.

Définition : c'est la première formule

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = p_1(x_1 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2$$

Propriété : c'est la deuxième formule

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

il faut ici calculer $E(X^2)$, espérance de la variable X^2.

Exemple

On reprend la situation avec 10 jetons dans un sac (1 jeton rouge, 2 jetons bleus et 7 jetons verts).

Si on tire un jeton rouge , alors on ***gagne*** 9 euros.	Si on tire un jeton bleu, alors on ***gagne*** 4 euros.	Si on tire un jeton vert, alors on ***perd*** 3 euros.

On note *X* la variable aléatoire qui nous donne le gain (algébrique) correspondant à la couleur du jeton.

→ ***on calcule la VARIANCE, avec la première formule liée à la définition.***

Variable aléatoire x_i	-3	4	9
Probabilités p_i	$0,7$	$0,2$	$0,1$

On retrouve $E(X) = -3 \times 0,7 + 4 \times 0,2 + 9 \times 0,1 = -0,4$ (euros)

et on a : $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + p_3(x_3 - E(X))^2$

$= 0,7(-3-(-0,4))^2 + 0,2(4-(-0,4))^2 + 0,1(9-(-0,4))^2$

$= 0,7 \times (-2,6)^2 + 0,2 \times (4,4)^2 + 0,1 \times (9,4)^2$

On obtient : $V(X) = 17,44 \rightarrow \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 4,18$ euros.

→ ***on calcule la VARIANCE, avec la deuxième formule liée à la propriété.***

Variable aléatoire $(x_i)^2$	9	16	81
Probabilités p_i	$0,7$	$0,2$	$0,1$

on met la variable au carré !

On a : $E(X^2) = 9 \times 0,7 + 16 \times 0,2 + 81 \times 0,1 = 17,6$

Donc on a : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 17,6 - (-0,4)^2 = 17,44$

On obtient donc $V(X) = 17,44$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 4,18$ euros.

Variance et écart type : applications avec la notion de risque

Un exemple de jeu risqué : l'écart type est grand

On prend une situation avec 10 jetons dans un sac (1 jeton rouge, 2 jetons bleus et 7 jetons verts).

Si on tire un jeton rouge , alors on ***gagne*** 50 euros.	Si on tire un jeton bleu, alors on ***gagne*** 2 euros.	Si on tire un jeton vert, alors on ***perd*** 10 euros.

On note X la variable aléatoire qui nous donne le gain (algébrique) correspondant à la couleur du jeton.

On obtient ici la loi de probabilité suivante :

Variable aléatoire x_i	-10	2	50
Probabilités p_i	$0,7$	$0,2$	$0,1$

On calcule l'espérance mathématique de cette variable aléatoire

$$E(x) = -10\times 0,7 + 2\times 0,2 + 50\times 0,1 = -1,6 \text{ euros}$$

On calcule la variance de cette variable aléatoire, avec la première formule de la fiche précédente.

$$V(x) = 0,7\times(-10-(-1,6))^2 + 0,2\times(2-(-1,6))^2 + 0,1\times(50-(-1,6))^2$$

$$= 0,7\times(-8,4)^2 + 0,2\times(3,6)^2 + 0,1\times(51,6)^2$$

On obtient : $V(x) = 318,24$ et $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \approx 17,84$ euros.

→ l'écart type est plutôt grand, le jeu est plutôt risqué.

Un exemple de jeu peu risqué : l'écart type est petit

On prend une situation avec 10 jetons dans un sac (1 jeton rouge, 2 jetons bleus et 7 jetons verts).

Si on tire un jeton rouge , alors on ***gagne*** 5 euros.	Si on tire un jeton bleu, alors on ***gagne*** 2 euros.	Si on tire un jeton vert, alors on ***perd*** 2 euros.

On note X la variable aléatoire qui nous donne le gain (algébrique) correspondant à la couleur du jeton.

On obtient ici la loi de probabilité suivante :

Variable aléatoire x_i	-2	2	5
Probabilités p_i	$0,7$	$0,2$	$0,1$

On calcule l'espérance mathématique de cette variable aléatoire

$$E(x) = -2\times 0,7 + 2\times 0,2 + 5\times 0,1 = -0,5 \text{ euros}$$

On calcule la variance de cette variable aléatoire, avec la première formule de la fiche précédente.

$$V(x) = 0,7\times(-2-(-0,5))^2 + 0,2\times(2-(-0,5))^2 + 0,1\times(5-(-0,5))^2$$

$$= 0,7\times(-1,5)^2 + 0,2\times(2,5)^2 + 0,1\times(5,5)^2$$

On obtient : $V(x) = 5,85$ et $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \approx 2,42$ euros.

→ l'écart type est assez petit, le jeu est peu risqué.

La propriété de linéarité de la variance et de l'écart type

La propiété de la variance et de l'écart type

Voici cette propriété de linéarité énoncée avec ses formules générales

Pour tout nombre a réel, on aura $V(ax) = a^2\ V(x)$
Pour tout nombre a réel, on aura $\sigma(ax) = \lvert a \rvert\ \sigma(x)$ (*c'est bien la valeur absolue de a*)

On peut rapidement résumer cette propriété avec des exemples tirés de situations concrètes :

- si un organisateur décide de multiplier les gains d'un jeu par 3 , alors la *variance* sera multipliée par 9 et l'*écart type* sera multiplié par 3.
- si un organisateur décide de diviser les gains d'un jeu par 2 (et donc de les multiplier par 0,5), alors la *variance* sera divisée par 4 et l'*écart type* sera divisée par 2.

Des exemples

On reprend l'exemple utilisé dans la fiche donnant la méthode de calcul de la variance et de l'écart type.

On prend une situation avec 10 jetons dans un sac (1 jeton rouge, 2 jetons bleus et 7 jetons verts).

Si on tire un jeton rouge , alors on ***gagne*** 9 euros.	Si on tire un jeton bleu, alors on ***gagne*** 4 euros.	Si on tire un jeton vert, alors on ***perd*** 3 euros.

On note X la variable aléatoire qui nous donne le gain (algébrique) correspondant à la couleur du jeton.

On avait obtenu $V(X) = 17{,}44$ et $\sigma(X) \approx 4{,}18$ euros .

→ si l'organisateur décide de multiplier les gains par 3

On multiplie la variance par 9 et l'écart type par 3 .

On aura : $V(3X) = 3^2 \times V(X) = 9\,V(X) = 156{,}96$

et $\sigma(3X) = 3\sigma(X) \approx 12{,}54$ euros .

→ si l'organisateur décide de multiplier les gains par 0,5 (et donc de les diviser par 2)

On multiplie la variance par 0,25 et l'écart type par 0,5 .

On aura : $V(0{,}5X) = 0{,}5^2 \times V(X) = 0{,}25\,V(X) = 4{,}36$

et $\sigma(0{,}5X) = 0{,}5\sigma(X) \approx 2{,}09$ euros .

Un dernier exemple avec un nombre *a* négatif

On va imaginer une situation pour laquelle la variance est égale à 36. L'écart type est donc égale à 6.

Si on décide de multiplier la variable aléatoire par – 5 alors :

On multiplie la variance par 25 et l'écart type par 5 .

On aura : $V(-5X) = (-5)^2 \times V(X) = 25\,V(X) = 25 \times 36 = 900$

et $\sigma(-5X) = \lvert -5 \rvert \times \sigma(X) = 5\,\sigma(X) = 5 \times 6 = 30$.

Comment bien utiliser sa calculatrice pour ce chapitre

Les fiches précédentes doivent vous servir à comprendre comment on calcule "à la main" l'*espérance*, la *variance* et l'*écart type* d'une variable aléatoire.
Mais, faire des probabilités, c'est aussi savoir donner du ***sens*** aux résultats obtenus (comment interpréter une espérance ? un écart type ?) . En cela, on utilisera très souvent sa calculatrice pour obtenir les résultats numériques qui nous permettront de réaliser l'interprétation finale.

Comment utiliser sa calculatrice ?

C'est une bonne question ! Mais la réponse ne peut pas être unique, car il existe différents modèles, et ils évoluent avec le temps.
Le meilleur conseil que je peux vous donner est de bien marquer dans votre cours (*comme si c'était une leçon*) la procédure à suivre sur VOTRE calculatrice, et donc sur quelles TOUCHES il vous faut taper.
Ensuite, vous apprenez tout ça par coeur et vous le faites, et le refaites, pour parfaitement mémoriser.

Un exemple : avec la TI 83 – Premium CE

On reprend la situation avec 10 jetons placés dans un sac (1 jeton rouge, 2 jetons bleus et 7 jetons verts).
En tirant un jeton rouge, on gagne 9 euros ; un bleu, on gagne 4 euros ; un vert, on perd 3 euros.
On note X la variable aléatoire qui nous donne le gain obtenu.

La loi de probabilité se résume avec un tableau :

Variable aléatoire x_i	**-3**	**4**	**9**
Probabilités p_i	**0,7**	**0,2**	**0,1**

Etape 1 : il faut *éditer* dans sa calculatrice le tableau qui correspond à la loi de probabilité.
Attention, ce tableau sera toujours en *colonne* sur les calculatrices !

On tape la touche "**stats**"
Dans le menu , on va sur **EDIT** et on sélectionne **1 : Modifier**
Dans la colonne **L1** , on tape les valeurs de la 1ere ligne du tableau (**-** 3 ; 4 ; 9)
Dans la colonne **L2** , on tape les valeurs da la 2eme ligne du tableau (0,7 ; 0,2 ; 0,1)

Etape 2 : on peut maintenant demander à la calculatrice de faire les calculs.

On tape à nouveau sur la touche "**stats**"
Dans le menu, on va cette fois sur **CALC** et on sélectionne **1 : Stats 1 Var**
Sur l'écran, on vérifie bien que l'on a l'affichage suivant

```
        Stats 1 Var
Xliste : L1
ListeFreq : L2
Calculer
```

Enfin, en tapant successivement sur "**entrer**" , on obtient l'écran final des résultats sur lequel :

→ L'*espérance* est sur la première ligne , elle correspond à la moyenne $\bar{x}$. On obtient ici **- 0,4 .**

→ L'*écart type* est sur la cinquième ligne , il est indiqué à l'aide de σ (X). On obtient environ **4,18 .**

Remarque
La variance n'apparait pas sur cet écran .
Ce n'est pas grave car, finalement, cette variance ne servait qu'à obtenir l'écart type.
Si vous voulez vraiment la variance, il suffit de prendre l'écart type et de le mettre au carré !