BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

Mathématiques - série ES

Enseignement OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : **3 heures** – coefficient : **5**

Mathématiques - série L

Enseignement de SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : **3 heures** – coefficient : **4**

SUJET

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).
Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

Exercice n°1 (5 points)

f est la fonction définie sur $[0\ ;\ 12]$ par $f(x) = 2xe^{-x}$.

Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver(2*x*exp(-x))
	-2*x*exp(-x)+2*exp(-x)
2	Factoriser(-2*x*exp(-x)+2*exp(-x))
	2*(1-x)*exp(-x)
3	Dériver(2*(1-x)*exp(-x))
	2*x*exp(-x)-4*exp(-x)
4	Factoriser(2*x*exp(-x)-4*exp(-x))
	2*(x-2)*exp(-x)

1. Vérifier le résultat de la ligne 1 donné par le logiciel de calcul formel.

Dans la suite, on pourra utiliser les résultats donnés par le logiciel de calcul formel sans les justifier.

2.

a. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;12]$ en le justifiant.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet deux solutions dans $[0\,;12]$.
Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.

3. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;12]$.

Partie B

Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction f :

- x représente le temps (exprimé en heure) écoulé depuis la consommation d'alcool ;
- $f(x)$ représente le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) de cette personne.

1.

a. Décrire les variations du taux d'alcoolémie de cette personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'alcool.

b. À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ? *Arrondir au centième.*

2. Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 g/L.

   Une fois l'alcool consommé, au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend-il une valeur conforme à la législation ?

Exercice n°2 (6 points)

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Une entreprise produit des valises de deux types : des valises à deux roues et des valises à quatre roues. Sur chacun des deux modèles, on effectue des tests afin d'évaluer leur solidité.

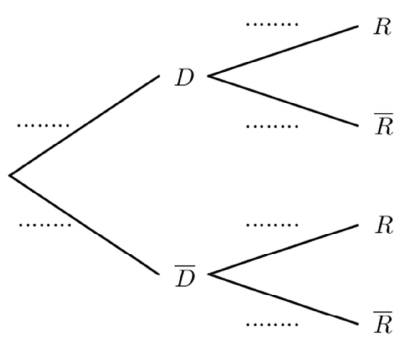
On dispose des informations suivantes sur le stock de production de cette entreprise :

- le stock contient 30 % de valises à deux roues ;
- 98 % des valises à deux roues réussissent les tests ;
- 95 % des valises à quatre roues réussissent les tests.

On choisit au hasard une valise de ce stock. On considère les événements suivants :

- D : « La valise a deux roues » ;
- R : « La valise réussit les tests ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous, illustrant cette situation.



2. Démontrer que la probabilité que la valise choisie réussisse les tests est de 0,959.

3. Sachant que la valise réussit les tests, quelle est la probabilité que ce soit une valise à quatre roues ?

Partie B

Parmi les tests de solidité effectués, l'un d'eux consiste à charger la valise et à la faire rouler sur une piste bosselée. On appelle « durée de vie » de la valise, le nombre de kilomètres parcourus avant d'atteindre une certaine usure des roues.

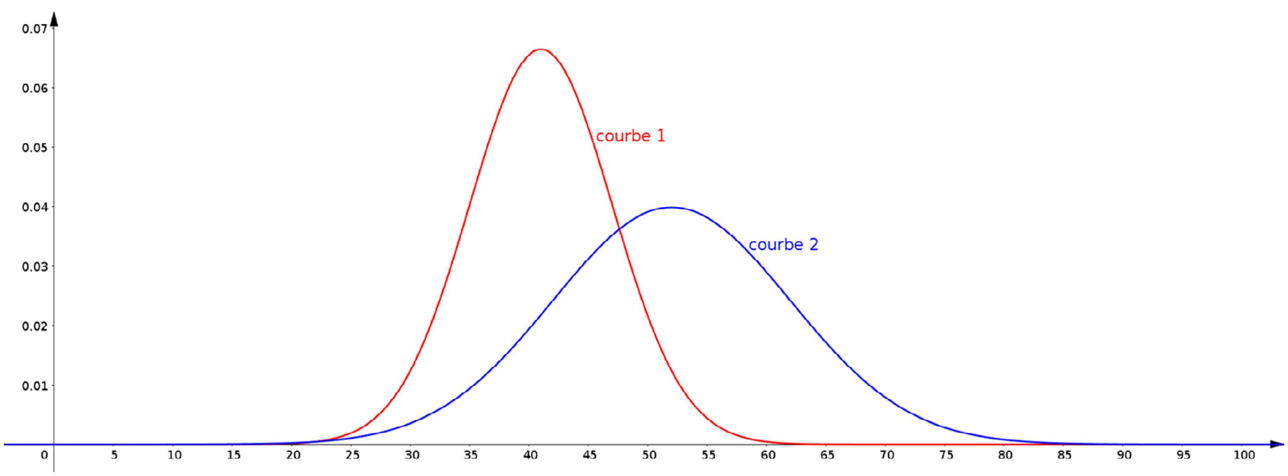
On note X la variable aléatoire qui, à chaque valise à deux roues, associe sa durée de vie en kilomètre. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 41$ et d'écart-type $\sigma = 6$.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque valise à quatre roues, associe sa durée de vie en kilomètre. On admet que Y suit la loi normale d'espérance $\mu' = 52$ et d'écart-type $\sigma' = 10$.

1. Quelle est la probabilité qu'une valise à deux roues ait une durée de vie supérieure à 52 kilomètres ?

2. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les densités associées aux variables aléatoires X et Y.

   À l'aide de ce graphique, déterminer pour quel type de valise (à deux roues ou à quatre roues) la probabilité que la durée de vie soit supérieure ou égale à 50 kilomètres est la plus grande. Expliquer.



Partie C

L'entreprise souhaite commercialiser un nouveau modèle de valises. Afin de mieux connaître les attentes des consommateurs, elle réalise un sondage auprès de 2 000 personnes. Parmi elles, 872 déclarent que la solidité est le principal critère pris en compte lors de l'achat (devant la légèreté, le prix, la couleur…).

1. Estimer par un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % la proportion de consommateurs pour lesquels la solidité est le principal critère de choix.
2. Quelle aurait dû être la taille de l'échantillon pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude égale à 0,04 ?

Exercice n°3 (5 points)

On s'intéresse à l'ensemble des ascenseurs d'une grande ville en 2017. Pour chacun d'eux, un contrat annuel d'entretien doit être souscrit.

Deux sociétés d'ascensoristes, notées A et B, se partagent ce marché.
En 2017, la société A entretient 30 % de ces ascenseurs.

On estime que, chaque année :

- 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B l'année suivante ;
- 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A l'année suivante ;
- les autres ascenseurs ne changeront pas de société d'ascensoristes l'année suivante.

On étudie l'évolution, au fil des années, de la répartition des contrats d'entretien de ces ascenseurs entre les sociétés A et B.

On note a_n la proportion d'ascenseurs entretenus par la société A pendant l'année $(2017 + n)$. De même, on note b_n la proportion d'ascenseurs entretenus par la société B lors de l'année $(2017 + n)$

On a donc $a_0 = 0{,}3$ et $b_0 = 0{,}7$.

1.
   a. Calculer a_1. Interpréter le résultat.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0{,}97a_n + 0{,}05b_n$ puis en déduire que $a_{n+1} = 0{,}92a_n + 0{,}05$.

2.

a. Le directeur de la société A constate que la proportion d'ascenseurs entretenus par sa société augmente au cours des années et se stabilise à $62{,}5\ \%$.

Indiquer, en le justifiant, lequel des algorithmes suivants donne l'année à partir de laquelle cette proportion dépasse $50\ \%$.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3

$A \leftarrow 0{,}3$
$N \leftarrow 0$
Tant que $A \leq 0{,}5$
    $A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$
    $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que
Afficher $2017 + N$
	$A \leftarrow 0{,}3$
	$N \leftarrow 0$
	Tant que $A > 0{,}5$
	    $A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$
	    $N \leftarrow N + 1$
	Fin Tant que
	Afficher $2017 + N$
		$A \leftarrow 0{,}3$
		$N \leftarrow 0$
		Tant que $A \leq 0{,}5$
		    $A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$
		Fin Tant que
		$N \leftarrow N + 1$
		Afficher $2017 + N$

b. Exécuter l'algorithme qui détermine l'année en question.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 0{,}625$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n = -0{,}325 \times 0{,}92^n + 0{,}625.$$

c. Déterminer la limite de la suite (a_n). Interpréter le résultat.

4. À l'aide de l'expression donnée dans la question **3.b**, résoudre l'inéquation $a_n \geq 0{,}5$. Quel résultat antérieur retrouve-t-on ?

Exercice n°4 (4 points)

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Les quatre affirmations sont indépendantes.

1. Un caractère est présent dans une population selon une proportion $p = 0{,}1$. Dans un échantillon de 400 personnes, on observe ce caractère sur 78 individus.

Affirmation 1 : Au seuil de 95%, cet échantillon est représentatif de la population totale pour ce caractère.

Rappel : Lorsque la proportion p d'un caractère dans la population est connue, l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % d'une fréquence de ce caractère obtenue sur un échantillon de taille n est donné par :

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,; p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

2. Dans une gare, le temps d'attente à un guichet donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1\,; 7]$.

Affirmation 2 : Le temps d'attente moyen à ce guichet est de 4 minutes.

3. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$.

Affirmation 3 : La valeur moyenne de g sur l'intervalle $[-2\,; 2]$ est égale à $\frac{16}{3}$.

4. x désigne un nombre réel négatif.

Affirmation 4 : $ln(e^{x+1}) - ln(e^x)$ est un nombre positif quel que soit le nombre réel x.