BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle [1 ; 9], alors :

a) $p(1 < X < 9) = \frac{1}{8}$ **b)** $p(5 < X < 9) = \frac{1}{2}$ **c)** $p(1 < X < 3) = \frac{3}{8}$ **d)** $p(1 < X < 2) = \frac{1}{2}$

2) Une enquête sanitaire a pour objectif d'estimer la proportion de personnes qui respectent le calendrier de vaccinations préconisé par le Haut Conseil de la Santé Publique. Pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude 0,01 au niveau de confiance 0,95 de cette proportion, il faut interroger :

a) 200 personnes **b)** 400 personnes **c)** 10 000 personnes **d)** 40 000 personnes

3) La solution de l'équation $x^{23} = 92$ est égale à :

a) 4 **b)** 1,2 **c)** $e^{\frac{\ln(92)}{23}}$ **d)** $e^{\frac{\ln(23)}{92}}$

4) On considère la fonction g définie sur l'intervalle [−10 ; 10] dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-10		-5		3		10
$g(x)$	7	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-6

On note $\mathrm{I} = \int_{-5}^{3} g(x)dx$. On peut affirmer que :

a) $-5 \leq \mathrm{I} \leq 3$ **b)** $2 \leq \mathrm{I} \leq 4$ **c)** $16 \leq \mathrm{I} \leq 32$ **d)** $4 \leq \mathrm{I} \leq 8$

EXERCICE 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [– 20 ; 20] par $f(x) = (-2x + 30)\mathrm{e}^{0,2x-3}$.

1) a) Montrer que $f'(x) = (-0,4x + 4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle [– 20 ; 20] .

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [– 20 ; 20] .
On précisera la valeur exacte du maximum de f .

2) a) Montrer que, sur l'intervalle [– 20 ; 20] , l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α .

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

3) Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver $(-10x + 200)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ = F . $(-2x + 30)\mathrm{e}^{0,2x-3}$
2	Dériver $(-2x + 30)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ $f'(x)$ $(-0,4x + 4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$
3	Dériver $(-0,4x + 4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ $f''(x)$ $(-0,08x + 0,4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$

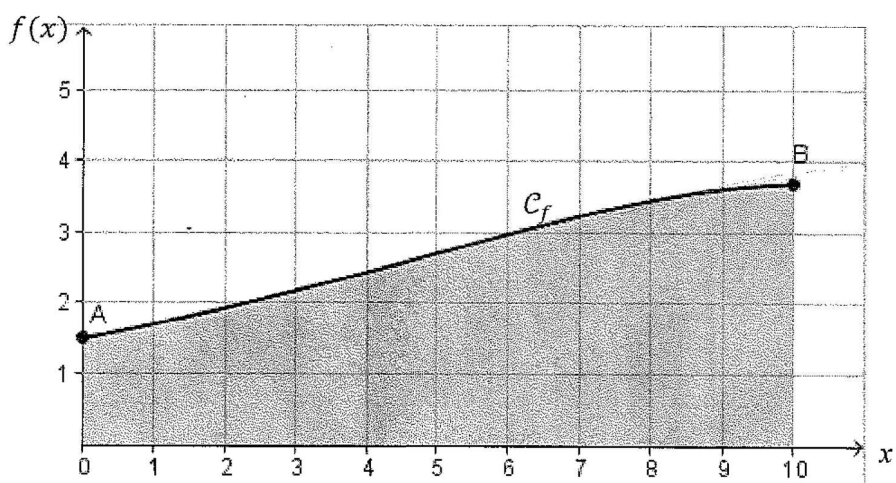
Répondre aux deux questions suivantes en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

a) Calculer la valeur exacte de $\int_{10}^{15} f(x)dx$.

b) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

Partie B

Une station de ski souhaite ouvrir une nouvelle piste au public. Le relief de cette piste est modélisé ci-dessous par la courbe représentative C_f de la fonction f définie dans la partie A sur l'intervalle [0 ; 10]. Le point B représente le départ de la nouvelle piste et le point A représente la station de ski où se trouve l'arrivée.



Le réel x représente la distance horizontale, exprimée en km, depuis la station de ski et $f(x)$ représente l'altitude, exprimée en km.

On appelle pente de la piste au point M, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M. Par exemple, une pente de 15 % en un point de la piste correspond à un coefficient directeur de $\frac{15}{100} = 0{,}15$.

1) On appelle dénivelé d'une piste de ski, la différence d'altitude entre le point de départ et le point d'arrivée de cette piste. Calculer le dénivelé de cette nouvelle piste. On arrondira le résultat au mètre.

2) La station de ski doit déterminer la difficulté de cette nouvelle piste en fonction de la pente.

- La piste sera classée noire, c'est-à-dire très difficile, si au moins une portion de la piste a une pente supérieure ou égale à 40 %.

- La piste sera classée rouge, c'est-à-dire difficile, si au moins une portion de la piste a une pente strictement comprise entre 25 % et 40 % (et aucune portion avec une pente supérieure ou égale à 40 %).

- Si toutes les portions de la piste ont une pente inférieure ou égale à 25 % alors la piste sera classée bleue, c'est-à-dire facile.

Déterminer le niveau de difficulté de cette nouvelle piste. Justifier la réponse.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un parti politique organise une élection en son sein pour désigner son candidat à l'élection présidentielle. Seuls les adhérents de ce parti peuvent voter à cette élection et ils ont le choix entre deux candidats A et B.
Pendant la campagne électorale, certains adhérents indécis changent d'avis.
Un institut de sondage consulte chaque mois le même échantillon d'adhérents et recueille leurs intentions de vote.
Il observe que l'évolution de l'état de l'opinion peut être modélisée de la façon suivante.
Chaque mois :

- 5 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat A le mois précédent changent d'avis et déclarent vouloir voter pour le candidat B.
- 3 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat B le mois précédent déclarent vouloir voter pour le candidat A.

Au début de la campagne électorale, 65 % des adhérents déclarent vouloir voter pour le candidat A.

On représente ce modèle par un graphe probabiliste ($\mathcal{G}$) de sommets A et B où :

- A est l'événement : « l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A » ;
- B est l'événement : « l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B ».

Dans la suite de l'exercice, on note :

- a_n la probabilité qu'un adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A, le n-ième mois après le début de la campagne. On a donc $a_0 = 0,65$.
- b_n la probabilité qu'un adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B, le n-ième mois après le début de la campagne.

On note $P_n = (a_n \quad b_n)$ l'état probabiliste correspondant aux intentions de vote le n-ième mois après le début de la campagne. On a donc $P_0 = (0,65 \quad 0,35)$.

1) a) Dessiner le graphe probabiliste ($\mathcal{G}$) de sommets A et B.

b) Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

2) Démontrer que $P_1 = (0,628 \quad 0,372)$.

3) On note $P = (a \quad b)$ l'état stable associé à ce graphe.

a) Démontrer que les nombres a et b sont solutions du système $\begin{cases} 0,05a - 0,03b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$.

b) Résoudre le système précédent.

c) Interpréter dans le contexte de l'exercice la solution obtenue à la question **3b)**.

4) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,92a_n + 0,03$.

b) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 0,375$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,92$ et préciser le premier terme.

c) Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n et en déduire que :
$a_n = 0,275 \times 0,92^n + 0,375$.

5) La campagne électorale dure 11 mois. Si la modélisation de l'institut de sondage est valable, quel candidat sera probablement élu ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

Une base nautique propose la location de différentes embarcations pour visiter les gorges du Verdon. Les touristes peuvent louer des kayaks, des pédalos ou des bateaux électriques, pour une durée de 1 heure ou 2 heures.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une étude statistique met en évidence que :

- 40 % des embarcations louées sont des pédalos ;
- 35 % des embarcations louées sont des kayaks ;
- les autres embarcations louées sont des bateaux électriques ;
- 60 % des pédalos sont loués pour une durée de 1 heure ;
- 70 % des kayaks sont loués pour une durée de 1 heure ;
- la moitié des bateaux électriques sont loués pour une durée de 1 heure.

On interroge au hasard un touriste qui vient pour louer une embarcation.

On note A, B, C, D et E les événements suivants :

- A : « l'embarcation louée est un pédalo » ;
- B : « l'embarcation louée est un kayak » ;
- C : « l'embarcation louée est un bateau électrique » ;
- D : « l'embarcation est louée pour une durée de 1 heure » ;
- E : « l'embarcation est louée pour une durée de 2 heures ».

1) Traduire la situation par un arbre pondéré.

2) Calculer la probabilité $p(A \cap E)$.

3) Montrer que la probabilité que l'embarcation soit louée pour une durée de 2 heures est égale à 0,39 .

4) Sachant que l'embarcation a été louée pendant 2 heures, quelle est la probabilité que ce soit un bateau électrique ? Arrondir le résultat au centième.

5) La base nautique pratique les tarifs suivants :

	1 heure	**2 heures**
Pédalo	15 €	25 €
Kayak	10 €	16 €
Bateau électrique	35 €	60 €

En moyenne, 200 embarcations sont louées par jour. Déterminer la recette journalière que peut espérer la base nautique.

Partie B

Dans cette partie les résultats seront arrondis au millième.

Les bateaux électriques sont équipés d'une batterie d'une autonomie moyenne de 500 minutes.
Les batteries des bateaux sont rechargées uniquement à la fin de chaque journée d'utilisation.
On note X la variable aléatoire correspondant à la durée de fonctionnement de la batterie d'un bateau, exprimée en minutes. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

1) À l'aide de la calculatrice, calculer $p(490 < X < 520)$.

2) Chaque jour, les bateaux sont utilisés pendant une durée de 8 heures sans être rechargés. Déterminer la probabilité que la batterie d'un bateau soit déchargée avant la fin de la journée.

3) Déterminer l'entier a tel que $p(X < a) \approx 0{,}01$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.