BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série ES

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 7 (ES)**

ES : ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur

- *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.*
- *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
- *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte **6 pages numérotées de 1 / 6 à 6 / 6**

EXERCICE 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. A et B sont deux évènements d'une expérience aléatoire. On note $\overline{B}$ l'évènement contraire de B. On sait que : $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}42$. On peut affirmer que :

   a. $P_A(B) = 0{,}3$.

   b. $P(A \cup B) = 0{,}58$.

   c. $P_B(A) = 0{,}84$.

   d. $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}28$.

2. Dans une station de ski, le temps d'attente à un télésiège donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;5]$.

   a. L'espérance de cette loi X est $\dfrac{2}{5}$.

   b. $p(X > 2) = \dfrac{3}{5}$.

   c. $p(X \leqslant 2) = \dfrac{3}{5}$.

   d. $p(X \leqslant 5) = 0$.

3. Une machine remplit des flacons dont le volume annoncé est de 100 mL. On admet que le volume contenu dans le flacon peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 100 mL et d'écart type 2 mL.

   a. $p(Y \leqslant 100) = 0{,}45$.

   b. $p(Y > 98) = 0{,}75$.

   c. $p(96 \leqslant Y \leqslant 104) \approx 0{,}95$.

   d. $p(Y \leqslant 110) \approx 0{,}85$.

4. Un article de journal affirme, qu'en France, il y a 16 % de gauchers. Un chercheur souhaite vérifier cette affirmation. Pour cela, il veut déterminer la taille de l'échantillon de la population française à étudier qui permettrait d'obtenir un intervalle de confiance d'amplitude égale à 0,1 au niveau de confiance de 0,95. La taille de l'échantillon est :

   a. 30.

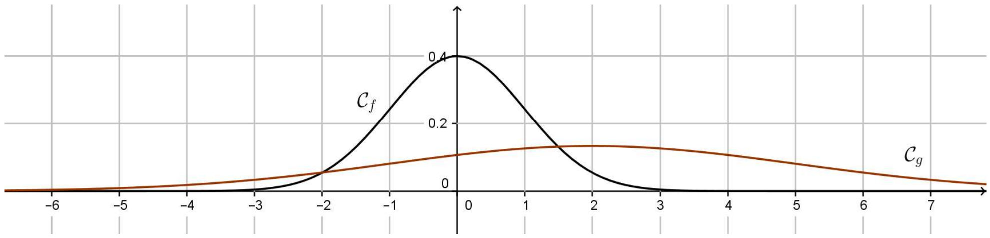
   b. 64.

   c. 100.

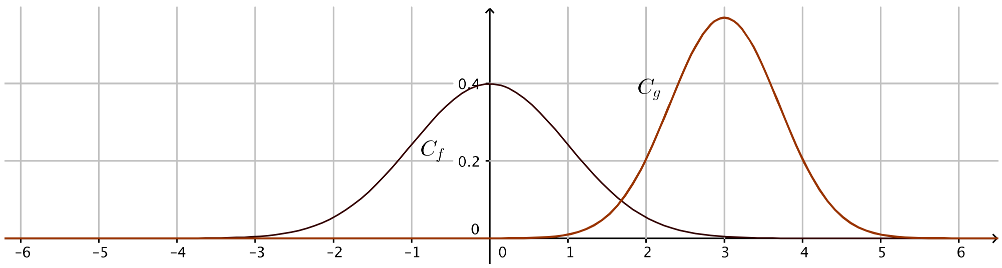
   d. 400.

5. La fonction f est la fonction densité de probabilité associée à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$. La fonction g est la fonction de densité de probabilité associée à la loi normale de moyenne $\mu = 3$ et d'écart type $\sigma = 2$.
La représentation graphique de ces deux fonctions est :

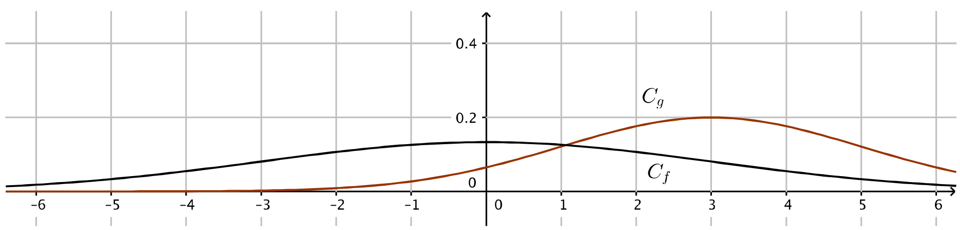
a.



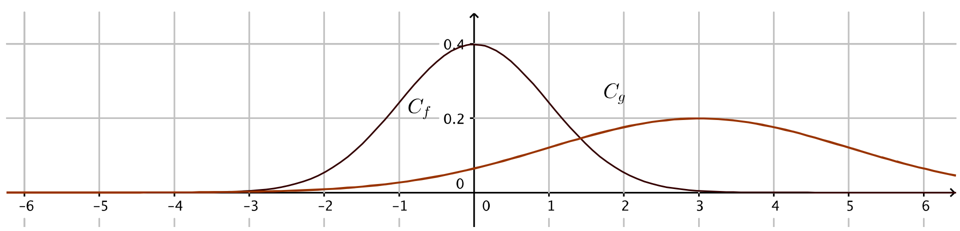
b.



c.



d.

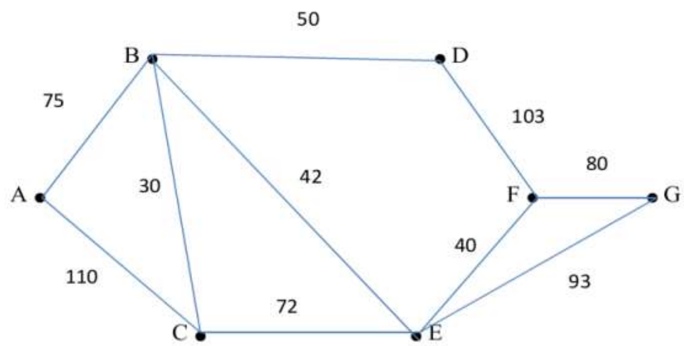


EXERCICE 2 (5 points) Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Le graphe ci-dessous représente le plan d'un centre de vacances. Les arêtes représentent les allées et les sommets, les carrefours.
On a indiqué sur chaque arête la longueur en mètre des allées entre deux carrefours.



1. Le service d'entretien doit nettoyer toutes les allées. En partant du carrefour C, peut-on nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles ? Justifier la réponse.

2. Existe-t-il un parcours permettant de nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles et de revenir au point de départ ? Justifier la réponse.

3. Déterminer le trajet le plus court pour aller du carrefour A au carrefour G.

Partie B

Dans ce centre de vacances, les vacanciers peuvent, chaque jour, déjeuner au restaurant du centre ou à l'extérieur. On constate chaque jour que :

- 5 % des vacanciers ayant déjeuné au centre de vacances ne se réinscrivent pas pour le lendemain ;

- 20 % des vacanciers ayant déjeuné à l'extérieur s'inscrivent pour déjeuner au centre de vacances le lendemain.

On note D l'état « Déjeuner au centre de vacances » et E l'évènement « Déjeuner à l'extérieur ».

1. Construire un graphe modélisant cette situation.

2. Écrire la matrice de transition de ce graphe, les sommets étant rangés selon l'ordre alphabétique.

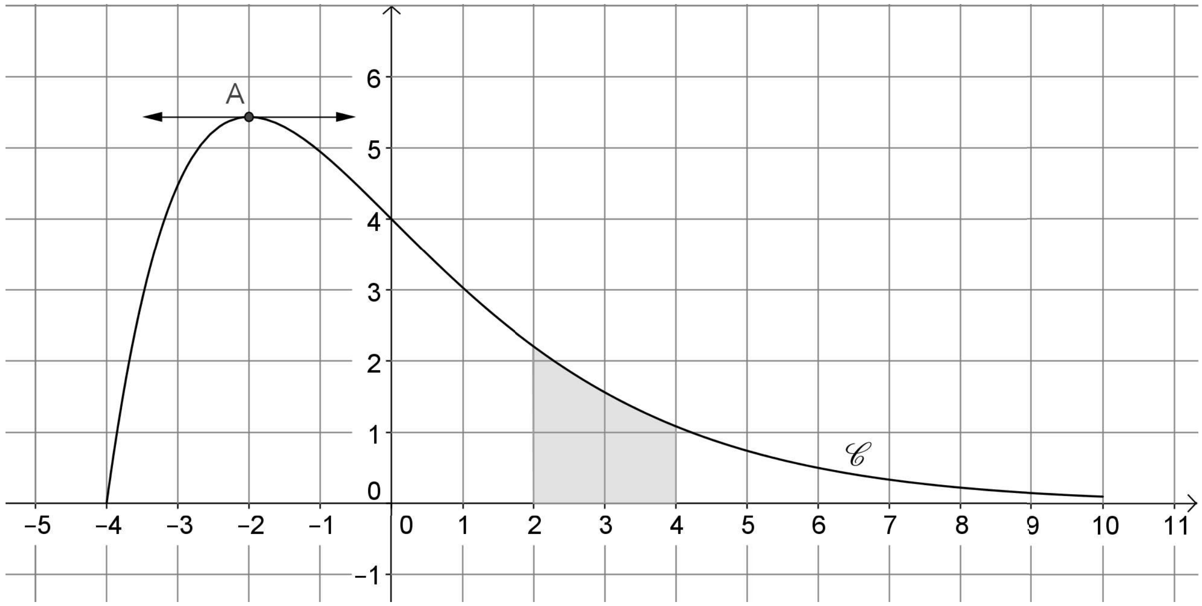
3. Le premier jour, le quart des vacanciers a déjeuné au centre de vacances. Quel pourcentage de vacanciers déjeunera au centre de vacances le deuxième jour ? Le cinquième jour ?

4. L'état $(0{,}5 \quad 0{,}5)$ est-il stable ?

5. Peut-on affirmer qu'à terme, si les comportements des vacanciers restent les mêmes, 75 % des vacanciers prendront leur déjeuner au centre ?

EXERCICE 3 (7 points) Commun à tous les candidats

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4\,;10]$. On note f' la fonction dérivée de f, et f'' sa dérivée seconde.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses.
Le domaine S grisé sur la figure est le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 2$ et la droite d'équation $x = 4$.



Partie A

1. Déterminer, en la justifiant, la valeur de $f'(-2)$.
2. Par une lecture graphique, quel semble être le signe de $f'(4)$?
3. Déterminer, par une lecture graphique, un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire du domaine S grisé sur la figure.

Partie B

La fonction f précédente est définie sur l'intervalle $[-4\,;\,10\,]$ par $f(x) = (x+4)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

1. **a.** Montrer que $f'(x) = (-0,5x-1)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

   b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;\,10\,]$.

   c. Montrer que sur l'intervalle $[\,1\,;\,6\,]$ l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution.
   On notera α cette unique solution.

   d. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.

2. On admet que la dérivée seconde de f est définie par $f''(x) = 0,25x\mathrm{e}^{-0,5x}$.

   a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;\,10\,]$.

b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion I dont on calculera les coordonnées.

3. **a.** On considère la fonction F définie par $F(x) = (-2x-12)\mathrm{e}^{-0,5x}$. Comment peut-on montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $[-4\,;\,10\,]$? *On ne demande pas d'effectuer cette vérification.*

b. Calculer

$$S = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On en donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

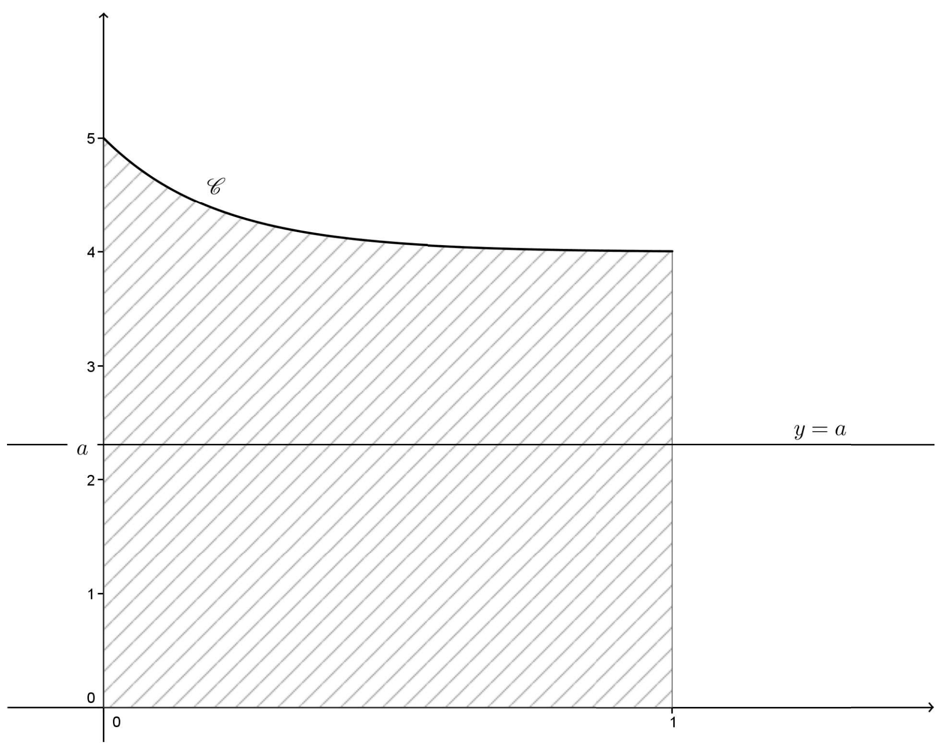
EXERCICE 4 (3 points) Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x) = 4 + \mathrm{e}^{-5x}$.

On a tracé dans le repère orthogonal ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère du plan.

Le domaine $\mathscr{D}$ hachuré sur la figure est le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

On veut partager le domaine hachuré en deux domaines de même aire par une droite d'équation $y = a$, parallèle à l'axe des abscisses, selon l'exemple donné ci-dessous.



1. Justifier que la valeur $a = 3$ ne convient pas.

2. Déterminer à 0,1 près une valeur de a qui convienne.