BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

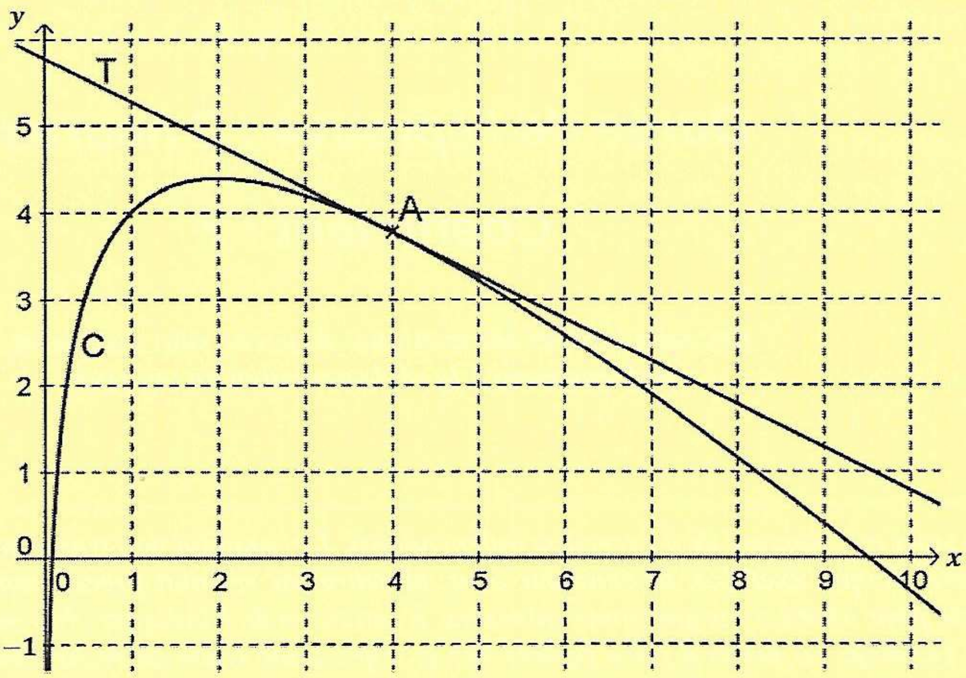
EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

Soit la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = 5 - x + 2 \ln x$.
On a représenté ci-dessous la courbe représentative C de la fonction f, ainsi que T, la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 4.



1) On note f' la fonction dérivée de f, on a :

a) $f'(x) = -1 + 2x$ **b)** $f'(x) = -2 \ln x + (5 - x)\dfrac{2}{x}$ **c)** $f'(x) = \dfrac{-x + 2}{x}$ **d)** $f'(x) = 4 + \dfrac{2}{x}$

2) Sur l'intervalle $]0 ; 10]$, l'équation $f'(x) = 0$ admet :

a) Aucune solution **b)** Une seule solution **c)** Deux solutions **d)** Plus de deux solutions

3) Une équation de T est :

a) $y = \dfrac{1}{2}x + 5{,}7$ **b)** $y = 5{,}7x - \dfrac{1}{2}$ **c)** $y = -\dfrac{1}{2}x + 1 + 2 \ln 4$ **d)** $y = -\dfrac{1}{2}x + 3 + 2 \ln 4$

4) La valeur de l'intégrale $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à l'intervalle :

a) $[1 ; 3]$ **b)** $[4 ; 5]$ **c)** $[8 ; 9]$ **d)** $[10 ; 15]$

EXERCICE 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

Un fabricant produit des pneus de deux catégories, la catégorie « pneu neige » et la catégorie « pneu classique ». Sur chacun d'eux, on effectue des tests de qualité pour améliorer la sécurité.

On dispose des informations suivantes sur le stock de production :

- le stock contient 40 % de pneus neige ;
- parmi les pneus neige, 92 % ont réussi les tests de qualité ;
- parmi les pneus classiques, 96 % ont réussi les tests de qualité.

Un client choisit un pneu au hasard dans le stock de production. On note :

- N l'événement : « Le pneu choisi est un pneu neige » ;
- C l'événement : « Le pneu choisi est un pneu classique » ;
- Q l'événement : « Le pneu choisi a réussi les tests de qualité ».

Rappel des notations :
Si A et B sont deux événements, $p(A)$ désigne la probabilité que l'événement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé. On notera aussi $\bar{A}$ l'événement contraire de A.

Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.

Dans tout cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

Partie A

1) Illustrer la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Calculer la probabilité de l'événement $N \cap Q$ et interpréter ce résultat par une phrase.

3) Montrer que $p(Q) = 0{,}944$.

4) Sachant que le pneu choisi a réussi les tests de qualité, quelle est la probabilité que ce pneu soit un pneu neige ?

Partie B

On appelle durée de vie d'un pneu la distance parcourue avant d'atteindre le témoin d'usure. On note X la variable aléatoire qui associe à chaque pneu classique sa durée de vie, exprimée en milliers de kilomètres. On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 8$.

1) Quelle est la probabilité qu'un pneu classique ait une durée de vie inférieure à 25 milliers de kilomètres ?

2) Déterminer la valeur du nombre d pour que, en probabilité, 20 % des pneus classiques aient une durée de vie supérieure à d kilomètres.

Partie C

Une enquête de satisfaction effectuée l'an dernier a révélé que 85 % des clients étaient satisfaits de la tenue de route des pneus du fabricant. Ce dernier souhaite vérifier si le niveau de satisfaction a été le même cette année.

Pour cela, il décide d'interroger un échantillon de 900 clients afin de conclure sur l'hypothèse d'un niveau de satisfaction maintenu.

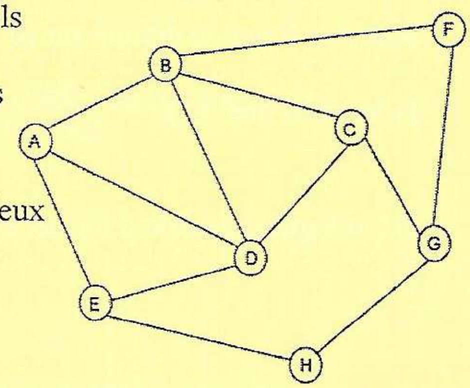
Parmi les 900 clients interrogés, 735 sont satisfaits de la tenue de route.
Quelle va être la conclusion du directeur avec un niveau de confiance 0,95 ? Détailler les calculs, la démarche et l'argumentation.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H.
Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens.
Cette situation est représentée par le graphe Γ ci-contre, dans lequel :

- les sommets représentent les aéroports,
- les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.



Partie A

1) a) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est complet.
b) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est connexe.

2) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.

3) Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ en respectant l'ordre alphabétique des sommets du graphe.

4) Pour la suite de l'exercice, on donne les matrices suivantes :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 8 & 8 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 7 & 6 & 7 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Un voyageur souhaite aller de l'aéroport B à l'aéroport H.

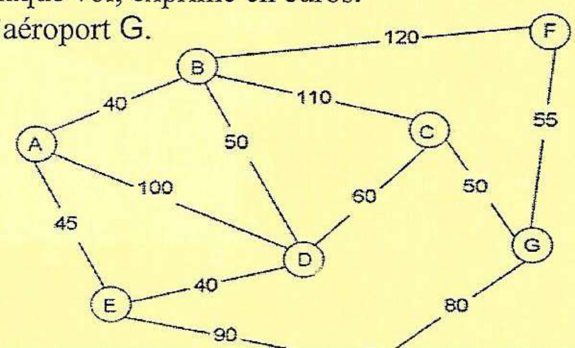
a) Déterminer le nombre minimal de vols qu'il doit prendre. Justifier les réponses à l'aide des matrices données ci-dessus.

b) Donner tous les trajets possibles empruntant trois vols successifs.

Partie B

Les arêtes sont maintenant pondérées par le coût de chaque vol, exprimé en euros.
Un voyageur partant de l'aéroport A doit se rendre à l'aéroport G.

En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet le moins cher.



EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur [0 ; 8] par $f(x) = \dfrac{0,4}{20\mathrm{e}^{-x}+1} + 0,4$.

1) Montrer que $f'(x) = \dfrac{8\mathrm{e}^{-x}}{(20\mathrm{e}^{-x}+1)^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2) Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

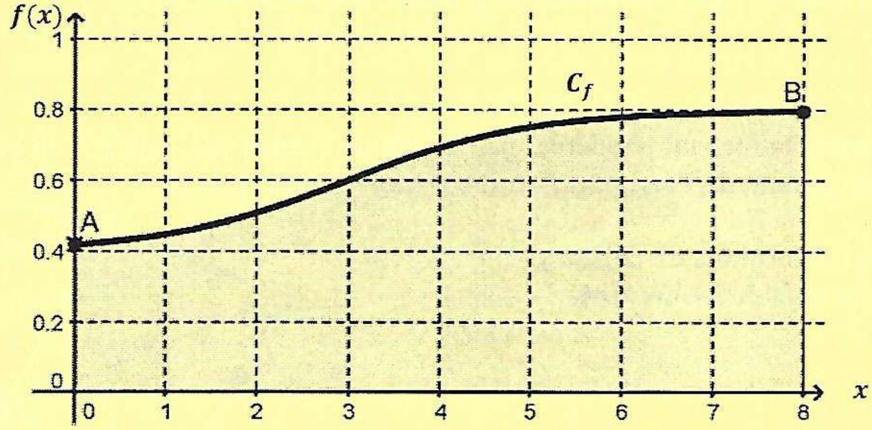
1	$f'(x) := 8*\mathrm{e}\wedge(-x)/(20*\mathrm{e}\wedge(-x)+1)^2$ $\rightarrow \quad f'(x) := \dfrac{\mathbf{8.e^{-x}}}{\mathbf{400\,(e^{-x})^2 + 40\,e^{-x} + 1}}$
2	$g(x)$:= Dérivée $[f'(x)]$ $\rightarrow \quad g(x) := \dfrac{\mathbf{160\,(e^{-x})^2 - 8\,e^{-x}}}{\mathbf{8000\,(e^{-x})^3 + 1200\,(e^{-x})^2 + 60\,e^{-x} + 1}}$
3	Factoriser $[g(x)]$ $\rightarrow \mathbf{8\,e^{-x}} \cdot \dfrac{\mathbf{20\,e^{-x} - 1}}{\mathbf{(20\,e^{-x} + 1)^3}}$

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Partie B

Dans une région montagneuse, une entreprise étudie un projet de route reliant les villages A et B situés à deux altitudes différentes. La fonction f, définie dans la partie A, modélise le profil de ce projet routier. La variable x représente la distance horizontale, en kilomètres, depuis le village A et $f(x)$ représente l'altitude associée, en kilomètres.

La représentation graphique $\boldsymbol{C_f}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



Dans cet exercice, le coefficient directeur de la tangente à C_f en un point M est appelé « pente en M ».

On précise aussi qu'une pente en M de 5 % correspond à un coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en M égal à 0,05.

Il est décidé que le projet sera accepté à condition qu'en aucun point de C_f la pente ne dépasse 12 %.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Proposition 1

L'altitude du village B est 0,6 km.

X ***Proposition 2***

L'écart d'altitude entre les villages A et B est 378 mètres, valeur arrondie au mètre.

X ***Proposition 3***

La pente en A vaut environ 1,8 %.

X ***Proposition 4***

Le projet de route ne sera pas accepté.