# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

# SESSION 2016

---

## MATHÉMATIQUES - Série ES
### ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

**Durée de l'épreuve : 3 heures        Coefficient : 5**

---

## MATHÉMATIQUES - Série L
### ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**Durée de l'épreuve : 3 heures        Coefficient : 4**

---

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.**

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

**Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 9 pages
numérotées de 1/9 à 9/9 .**

## EXERCICE 1 (4 points)

*Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des quatre questions posées, une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.*

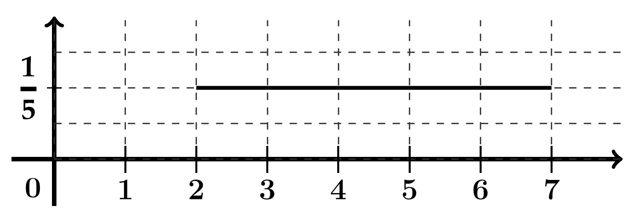
**1.** Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3x - x\ln x$.
On admet que $f$ est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et on désigne par $f'$ sa fonction dérivée.
Pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ on a :

**(a)** $f'(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$ **(b)** $f'(x) = 3 - \ln x$ **(c)** $f'(x) = 2 - \ln x$

**2.** On considère la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
La somme des 13 premiers termes de cette suite vaut :

**(a)** $4\,095$ **(b)** $8\,191$ **(c)** $\dfrac{1-2^{14}}{1-2}$

**3.** Une variable aléatoire $X$ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[2\,;7]$ dont la fonction de densité est représentée ci-dessous.




$P(\mathrm{A})$ désigne la probabilité d'un évènement A et $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire $X$.

**(a)** $P(3 \leqslant X \leqslant 7) = \dfrac{1}{4}$ **(b)** $P(X \geqslant 4) = P(2 \leqslant X \leqslant 5)$ **(c)** $E(X) = \dfrac{9}{5}$

**4.** On réalise un sondage sur un échantillon de $n$ personnes ($n$, entier naturel non nul).
Parmi les tailles de l'échantillon proposées ci-dessous, quelle est celle qui permet d'obtenir un intervalle de confiance au niveau de confiance $0,95$ avec une amplitude de $0,02$ ?

**(a)** $n = 5\,000$ **(b)** $n = 100$ **(c)** $n = 10\,000$

## EXERCICE 2 (6 points)

**La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.**

L'entreprise *BBE* (*Bio Bois Énergie*) fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités.

L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

- Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction $C$ définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

  $$C(x) = 0,3x^2 - x + \mathrm{e}^{-x+5}$$

  où $x$ désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.

- Dans l'entreprise *BBE* le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros.
  La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction $R$ définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

  $$R(x) = 3x$$

  où $x$ désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.

- On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où $x$ désigne la quantité de granulés en tonnes.

### Partie A : Étude graphique

Sur le graphique situé en annexe (page 9/9), on donne $\mathscr{C}$ et $\Delta$ les représentations graphiques respectives des fonctions $C$ et $R$ dans un repère d'origine O.

**Dans cette partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.**

1. Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.

2. **(a)** Déterminer les valeurs de $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.

**(b)** Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.

## Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

$$g(x) = -0,6\,x + 4 + \mathrm{e}^{-x+5}.$$

On admet que la fonction $g$ est dérivable sur l'intervalle $[1\,;15]$ et on note $g'$ sa fonction dérivée.

**1.** **(a)** Calculer $g'(x)$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1\,;15]$.

**(b)** En déduire que la fonction $g$ est décroissante sur l'intervalle $[1\,;15]$.

**2.** **(a)** Dresser le tableau de variation de la fonction $g$ sur l'intervalle $[1\,;15]$, en précisant les valeurs de $g(1)$ et de $g(15)$ arrondies à l'unité.

**(b)** Le tableau de variation permet d'affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[1\,;15]$.
Donner une valeur approchée de $\alpha$ à 0,1 près.

**(c)** Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1\,;15]$.

## Partie C : Application économique

**1.** Démontrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1\,;15]$, on a :

$$D(x) = -0,3x^2 + 4x - \mathrm{e}^{-x+5}.$$

**2.** On admet que la fonction $D$ est dérivable sur l'intervalle $[1\,;15]$ et on note $D'$ sa fonction dérivée.
Démontrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1\,;15]$, on a $D'(x) = g(x)$, où $g$ la fonction étudiée dans la partie B.

**3.** En déduire les variations de la fonction $D$ sur l'intervalle $[1\,;15]$.

**4.** **(a)** Pour quelle quantité de granulés l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal ?
On donnera une valeur approchée du résultat à 0,1 tonne près.

**(b)** Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.

## EXERCICE 3 (5 points)

**Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.**

### Partie A

On dispose des renseignements suivants à propos du baccalauréat session 2015 :

- 49 % des inscrits ont passé un baccalauréat général, 20 % un baccalauréat technologique et les autres un baccalauréat professionnel ;
- 91,5 % des candidats au baccalauréat général ont été reçus ainsi que 90,6 % des candidats au baccalauréat technologique.

*Source : DEPP (juillet 2015)*

On choisit au hasard un candidat au baccalauréat de la session 2015 et on considère les évènements suivants :

- $G$ : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat général » ;
- $T$ : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat technologique » ;
- $S$ : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat professionnel » ;
- $R$ : « Le candidat a été reçu ».

Pour tout évènement $A$, on note $P(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son évènement contraire.
De plus, si $B$ est un autre évènement, on note $P_B(A)$ la probabilité de $A$ sachant $B$.

**1.** Préciser les probabilités $P(G)$, $P(T)$, $P_T(R)$ et $P_G(R)$.

**2.** Traduire la situation par un arbre pondéré. On indiquera les probabilités trouvées à la question précédente. Cet arbre pourra être complété par la suite.

**3.** Vérifier que la probabilité que le candidat choisi se soit présenté au baccalauréat technologique et l'ait obtenu est égale à 0,181 2 .

**4.** Le ministère de l'Éducation Nationale a annoncé un taux global de réussite pour cette session de 87,8 % pour l'ensemble des candidats présentant l'un des baccalauréats.

**(a)** Vérifier que la probabilité que le candidat choisi se soit présenté au baccalauréat professionnel et l'ait obtenu est égale à 0,248 45 .

**(b)** Sachant que le candidat s'est présenté au baccalauréat professionnel, déterminer la probabilité qu'il ait été reçu. On donnera une valeur approchée du résultat au millième.

## Partie B

À l'issue des épreuves du baccalauréat, une étude est faite sur les notes obtenues par les candidats en mathématiques et en français.

On admet que la note de mathématiques peut être modélisée par une variable aléatoire $X_M$ qui suit la loi normale de moyenne $12,5$ et d'écart-type $3,5$.

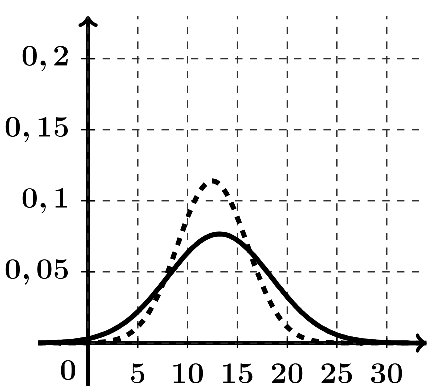
De même la note de français peut être modélisée par une variable aléatoire $X_F$ qui suit la loi normale de moyenne $13,2$ et d'écart-type $2,1$.

**1**. Déterminer $P\left(9 \leqslant X_M \leqslant 16\right)$ en donnant le résultat arrondi au centième.

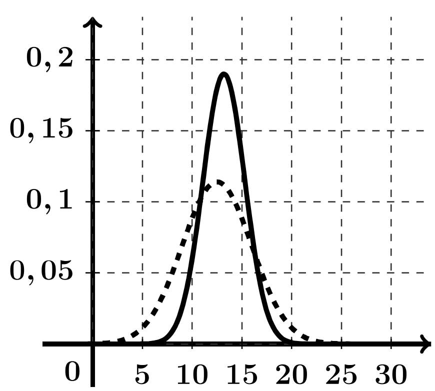
**2**. Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté en pointillé la fonction densité associée à la variable aléatoire $X_M$.

La fonction densité associée à $X_F$ est représentée sur un seul de ces graphiques.

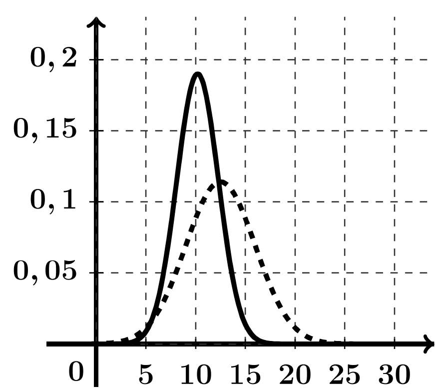
Quel est ce graphique ? Expliquer le choix.




Graphique 1




Graphique 2




Graphique 3

## EXERCICE 4 (5 points)

En janvier 2016, une personne se décide à acheter un scooter coûtant 5 700 euros sans apport personnel. Le vendeur lui propose un crédit à la consommation d'un montant de 5 700 euros, au taux mensuel de $1,5\,\%$. Par ailleurs, la mensualité fixée à 300 euros est versée par l'emprunteur à l'organisme de crédit le 25 de chaque mois. Ainsi, le capital restant dû augmente de $1,5\,\%$ puis baisse de 300 euros.

Le premier versement a lieu le 25 février 2016.

On note $u_n$ le capital restant dû en euros juste après la $n-$ième mensualité ($n$ entier naturel non nul). On convient que $u_0 = 5\,700$.

Les résultats seront donnés sous forme approchée à $0,01$ près si nécessaire.

**1.** **(a)** Démontrer que $u_1$, capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de 5 485,50 euros.

**(b)** Calculer $u_2$.

**2.** On admet que la suite $(u_n)$ est définie pour tout entier naturel $n$ par : $u_{n+1} = 1,015\, u_n - 300$.

On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| **Variables** : | $n$ est un entier naturel |
| | $u$ est un nombre réel |
| **Traitement** : | Affecter à $u$ la valeur 5 700 |
| | Affecter à $n$ la valeur 0 |
| | Tant que $u > 4\,500$ faire |
| |     $u$ prend la valeur $1,015 \times u - 300$ |
| |     $n$ prend la valeur $n + 1$ |
| | Fin Tant que |
| **Sortie** : | Afficher $n$ |

**(a)** Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaires entre la deuxième et la dernière colonne.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valeur de $u$** | 5 700 | … | … | | |
| **Valeur de $n$** | 0 | … | … | | |
| $u > 4\,500$ (vrai/faux) | vrai | … | … | vrai | faux |

**(b)** Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

**3.** Soit la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - 20\,000$.

**(a)** Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a : $v_{n+1} = 1,015 \times v_n$.

**(b)** En déduire que pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n$.

**4.** À l'aide de la réponse précédente, répondre aux questions suivantes :

**(a)** Démontrer qu'une valeur approchée du capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est 2 121,68 euros.

**(b)** Déterminer le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt.

**(c)** Quel sera le montant de la dernière mensualité ?

**(d)** Lorsque la personne aura terminé de rembourser son crédit à la consommation, quel sera le coût total de son achat ?

**ANNEXE**

**N'est pas à rendre avec la copie**