BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES
- Série ES -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES
- Série L -

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

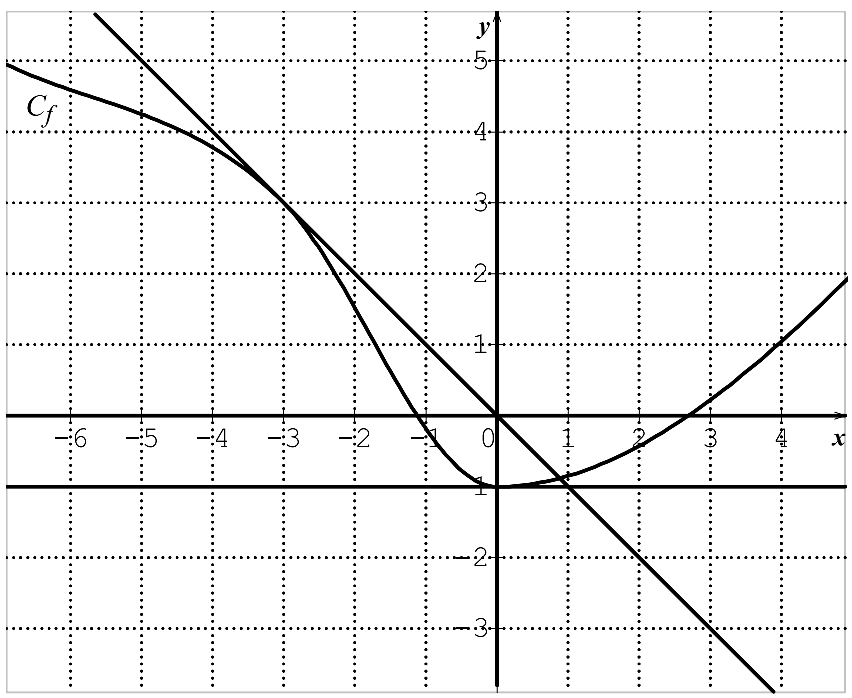
Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre propositions est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur **R** est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0.

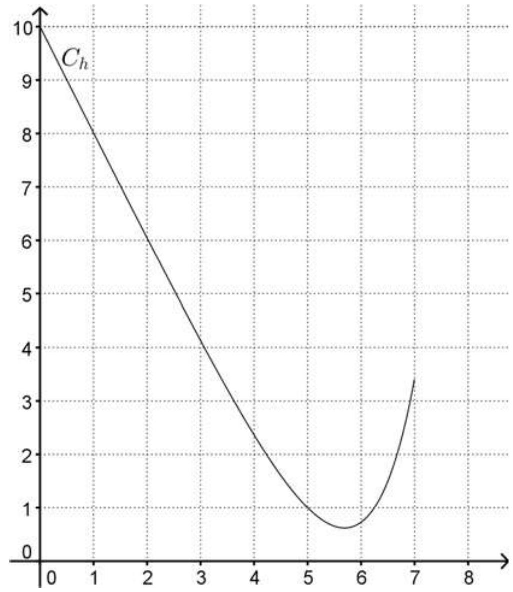


a) $f'(0) = -1$ **b)** $f'(-1) = 0$ **c)** $f'(-3) = -1$ **d)** $f'(-3) = 3$

2) On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = (x+1)\ln(x)$.

a) $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ **b)** $g'(x) = 1 + \ln(x)$ **c)** $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **d)** $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \ln(x)$

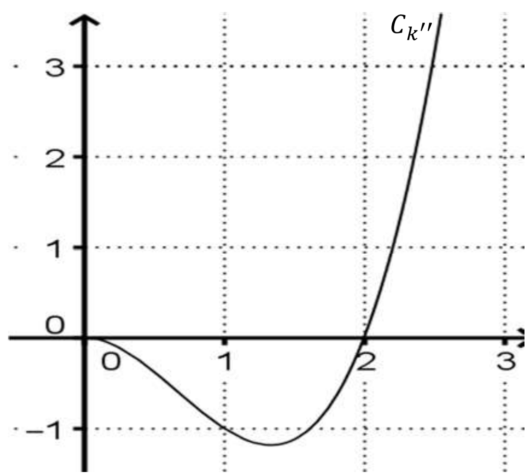
3) On considère la fonction h définie sur $[0\ ;7]$ et représentée par la courbe ci-dessous :



a) $\int_0^5 h(x)\mathrm{d}x = h(5) - h(0)$ **b)** $20 < \int_0^5 h(x)\mathrm{d}x < 30$

c) $15 < \int_0^5 h(x)\mathrm{d}x < 20$ **d)** $\int_0^5 h(x)\mathrm{d}x = 20$

4) On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $[0\ ;+\infty[$.



a) k est concave sur l'intervalle $[1\ ;2\ ]$. **b)** k est convexe sur l'intervalle $[0\ ;2\ ]$.

c) k est convexe sur $[0\ ;+\infty[$. **d)** k est concave sur $[0\ ;+\infty[$**.**

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Un centre de loisirs destiné aux jeunes de 11 ans à 18 ans compte 60 % de collégiens et 40 % de lycéens.
Le directeur a effectué une étude statistique sur la possession de téléphones portables. Cette étude a montré que 80 % des jeunes possèdent un téléphone portable et que, parmi les collégiens, 70 % en possèdent un.
On choisit au hasard un jeune du centre de loisirs et on s'intéresse aux événements suivants :

- C : « le jeune choisi est un collégien » ;
- L : « le jeune choisi est un lycéen » ;
- T : « le jeune choisi possède un téléphone portable ».

Rappel des notations
Si A et B sont deux événements, $p(A)$ désigne la probabilité que l'événement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de A sachant que l'événement B est réalisé. On note aussi $\bar{A}$ l'événement contraire de A.

1) Donner les probabilités : $p(C)$, $p(L)$, $p(T)$, $p_C(T)$.

2) Faire un arbre de probabilités représentant la situation et commencer à le renseigner avec les données de l'énoncé.

3) Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien possédant un téléphone portable.

4) Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien sachant qu'il possède un téléphone portable.

5) a) Calculer $p(T \cap L)$, en déduire $p_L(T)$.
b) Compléter l'arbre construit dans la question **2)**.

Partie B

En 2012 en France, selon une étude publiée par l'Arcep (Autorité de régulation des communications électroniques et des postes), les adolescents envoyaient en moyenne 83 SMS (messages textes) par jour, soit environ 2500 par mois. On admet qu'en France le nombre de SMS envoyés par un adolescent en un mois peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 2\ 500$ et d'écart-type $\sigma = 650$.

Dans les questions suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice et les probabilités arrondies au millième.

1) Calculer la probabilité qu'un adolescent envoie entre 2 000 et 3 000 SMS par mois.

2) Calculer $p(X \geq 4\ 000)$.

3) Sachant que $p(X \leq a) = 0{,}8$, déterminer la valeur de a. On arrondira le résultat à l'unité.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.

Le patron de cette entreprise remarque que, chaque année, 12 % de contrats supplémentaires sont souscrits et 6 contrats résiliés. Il se fonde sur ce constat pour estimer le nombre de contrats annuels à venir.

En 2015, l'entreprise PiscinePlus dénombrait 75 contrats souscrits.

On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de contrats souscrits auprès de l'entreprise PiscinePlus l'année $2015 + n$. Ainsi, on a $u_0 = 75$.

1) a) Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2016.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 1{,}12\, u_n - 6$.

2) L'entreprise PiscinePlus peut prendre en charge un maximum de 100 contrats avec son nombre actuel de salariés. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel.

On cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher. Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

```
L1   Variables :    n est un nombre entier naturel
L2                  U est un nombre réel
L3   Traitement :   Affecter à n la valeur 0
L4                  Affecter à U la valeur 75
L5                  Tant que U ≤ 100  faire
L6                        n prend la valeur n +1
L7                        U prend la valeur 1,12 U − 6
L8                  Fin Tant que
L9   Sortie :       Afficher…….
```

a) Recopier et compléter la ligne L9.

b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats à l'unité.

Valeur de n	0		
Valeur de U	75		

c) Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.

3) On rappelle que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1{,}12 u_n - 6$ et $u_0 = 75$.

On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 50$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25 \times 1{,}12^n + 50$.

c) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n > 100$.

d) Quel résultat de la question **2)** retrouve-t-on ?

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[3\,;13]$ par : $f(x) = -2x + 20 - \mathrm{e}^{-2x+10}$.

Partie A : Étude de la fonction f

1) Montrer que la fonction dérivée $f\,'$ de la fonction f, définie pour tout x de l'intervalle $[3\,;13]$, a pour expression :

$$f\,'(x) = 2(-1 + \mathrm{e}^{-2x+10}).$$

2) a) Résoudre dans l'intervalle $[3\,;13]$ l'inéquation : $f\,'(x) \geq 0$.

b) En déduire le signe de $f\,'(x)$ sur l'intervalle $[3\,;13]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Les valeurs du tableau seront, si besoin, arrondies à 10^{-3}.

c) Calculer l'intégrale $\int_3^{13} f(x)dx$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie B : Application

Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1 300. On suppose que toute la production est commercialisée.
Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle $[3\,;13]$ par la fonction f.

En utilisant la partie A, répondre aux questions suivantes :

1) Déterminer le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal et donner ce bénéfice, arrondi à l'euro.

2) Calculer le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 300 et 1300 toboggans. Arrondir le résultat à l'euro.

Partie C : Rentabilité

Pour être rentable, l'usine doit avoir un bénéfice positif.

Déterminer le nombre minimum et le nombre maximum de toboggans que l'usine doit fabriquer en un mois pour qu'elle soit rentable. Justifier la réponse.