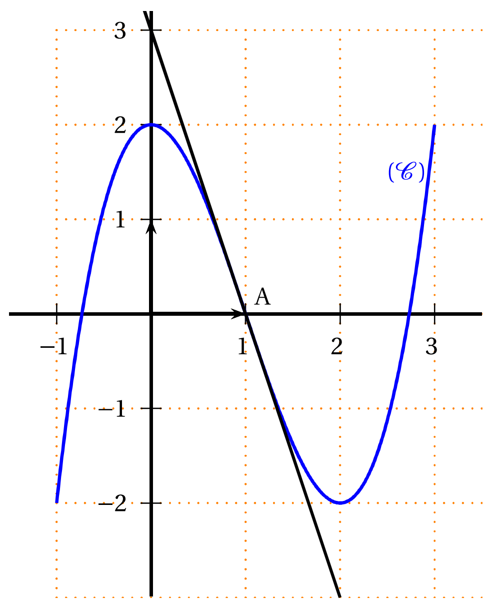
Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie 19 novembre 2015

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Une réponse exacte rapporte un point Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Pour chacune des questions posées une seule des quatre réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

On donne ci-dessous la représentation graphique $(\mathscr{C})$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 3]$.
On note f' la fonction dérivée de f et F une primitive de f.
La tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point $A(1 ; 0)$ est tracée, elle passe par le point de coordonnées $(0 ; 3)$.



1. Calcul de $f'(1)$

a. $f'(1) = 3$ **b.** $f'(1) = -3$
c. $f'(1) = -\frac{1}{3}$ **d.** $f'(1) = 0$

2. La fonction f est :

a. concave sur $[-1 ; 1]$ **b.** convexe sur $[-1 ; 1]$
c. concave sur $[0 ; 2]$ **d.** convexe sur $[0 ; 2]$

3. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Un encadrement de I est :

a. $0 \leqslant I \leqslant 1$ **b.** $1 \leqslant I \leqslant 2$
c. $2 \leqslant I \leqslant 3$ **d.** $3 \leqslant I \leqslant 4$

4. La fonction F est :

a. croissante sur $[0\ ;\ 1]$
b. décroissante sur $[0\ ;\ 1]$
c. croissante sur $[-1\ ;\ 0]$
d. croissante sur $[-1\ ;\ 1]$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Dans une ville, un service périscolaire comptabilise 150 élèves inscrits en septembre 2014. On admet que, chaque année, 80 % des élèves inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 40 nouveaux élèves inscrits. La capacité d'accueil du périscolaire est de 190 élèves maximum.
On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au périscolaire en septembre de l'année $2014+n$, avec n un nombre entier naturel.
On a donc $u_0 = 150$.

1. Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au périscolaire en septembre 2015.
2. Pour tout entier naturel n, justifier que $u_{n+1} = 0,8u_n + 40$.
3. On donne l'algorithme suivant :

```
Initialisation
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 150

Traitement
Tant que U ⩽ 190
    n prend la valeur n+1
    U prend la valeur 0,8U + 40
Fin tant que

Sortie Afficher le nombre 2014+n
```

a. Recopier et compléter le tableau suivant par autant de colonnes que nécessaire pour retranscrire l'exécution de l'algorithme. Arrondir les résultats au centième.

Valeur de n	0	1	2	
Valeur de U	150			
Condition $U \leqslant 190$	vraie			

b. En déduire l'affichage obtenu en sortie de l'algorithme et interpréter ce résultat.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Pour tout entier naturel n, démontrer que $u_n = 200 - 50 \times 0,8^n$.

c. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que :

$$200 - 50 \times 0,8^n > 190.$$

d. À partir de quelle année la directrice du périscolaire sera-t-elle obligée de refuser des inscriptions faute de places disponibles ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

L'été un centre de loisirs propose aux adolescents la pratique du canoë-kayak ou de la planche à rame.
Tous les matins, chaque adolescent doit choisir un et un seul sport parmi les deux proposés.
On admet que :

- si un adolescent choisit le canoë-kayak un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse la planche à rame le jour suivant est égale à $0,4$;
- si un adolescent choisit la planche à rame un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse le canoë-kayak le jour suivant est égale à $0,2$;
- le premier jour, la proportion d'adolescents qui choisissent le canoë-kayak est égale à $0,85$.

On note :

- K l'état : « l'adolescent choisit le canoë-kayak » ;
- $\overline{K}$ l'état : « l'adolescent choisit la planche à rame ».

On note, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

- p_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse le canoë-kayak lors du n-ième jour ;
- q_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse la planche à rame le n-ième jour ;
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste lors du n-ième jour.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets K et $\overline{K}$.
2. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe, les sommets K et $\overline{K}$ étant classés dans cet ordre.
3. Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}$.
4. Avec la calculatrice, déterminer l'état probabiliste lors du 3e jour.
5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, montrer que $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$.
6. On considère l'algorithme suivant :

```
Initialisation
Choisir un nombre entier naturel N ⩾
2
p prend la valeur 0,85

Traitement
Pour i allant de 2 à N
    p prend la valeur 0,4p + 0,2
Fin pour

Sortie
Afficher p
```

   a. Pour la valeur $N = 5$ saisie, recopier et compléter le tableau suivant par autant de colonnes que nécessaire pour retranscrire l'exécution de l'algorithme. Arrondir les résultats au millième.

Valeur de i		2		
Valeur de p	0,85			

   b. En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de N saisie est 5.

c. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme.

Partie B

D'après la partie A, on sait que $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
On admet que $p_n = \dfrac{31}{60} \times 0,4^{n-1} + \dfrac{1}{3}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1. Conjecturer la limite de la suite $\left(p_n\right)$.
2. Interpréter le résultat.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Pierre a des pommiers dans son verger. Il décide de faire du jus de pomme avec ses fruits.
Dans sa récolte :

- il dispose de 80 % de pommes de variété A et de 20 % de pommes de variété B.
- 15 % des pommes de variété A et 8 % des pommes de variété B sont avariées et devront être jetées.

On prend une pomme au hasard dans la récolte et on note :

- A l'évènement « la pomme est de variété A » ;
- B l'évènement « la pomme est de variété B » ;
- J l'évènement « la pomme est jetée » ;
- $\overline{J}$ l'évènement contraire de l'évènement J.

On note $p(A)$ la probabilité de l'évènement A.

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans tout l'exercice, donner des valeurs approchées des résultats au millième.

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la pomme soit de variété A et soit jetée.
3. Montrer que la probabilité qu'une pomme soit jetée est égale à 0,136.
4. Calculer la probabilité qu'une pomme soit de variété A sachant qu'elle a été jetée.

Partie B

Une pomme pèse en moyenne 150 g.
On modélise le poids d'une pomme en grammes par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 150$ et d'écart type $\sigma = 10$.

1. Déterminer la probabilité que la pomme ait un poids inférieur à 150 g.
2. Déterminer $p(120 \leqslant X \leqslant 170)$. Interpréter ce résultat.

Partie C

Pierre a pris rendez-vous dans une fabrique de jus de pomme artisanale. Il arrive au hasard entre 8 heures et 9 heures 30 minutes.
Son heure d'arrivée est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [8 ; 9,5].
Déterminer la probabilité que Pierre arrive entre 8 h 30 et 8 h 45.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(x) = (2x-5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20.$$

Partie A

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,10]$, $f'(x) = (-2x+7)\mathrm{e}^{-x+4}$.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
   Si nécessaire, arrondir au millième les valeurs présentes dans le tableau de variation.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,10]$ et déterminer un encadrement d'amplitude $0,01$ de α.
4. On admet que la fonction F définie sur $[0\,;\,10]$ par

   $$F(x) = (-2x+3)\mathrm{e}^{-x+4} + 20x$$

   est une primitive de f sur $[0\,;\,10]$.
   Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$. Arrondir le résultat au millième.

Partie B

Une entreprise fabrique entre 0 et 1 000 objets par semaine.
Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets est modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = (2x-5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20.$$

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la partie A et en arrondissant les résultats à l'unité.

1. Quel est le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum ?
   Quel est ce bénéfice maximal en euros ?
2. À partir de combien d'objets fabriqués et vendus l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice positif ?
3. Interpréter le résultat de la question 4 de la partie A.