∽ Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie ∾
17 novembre 2014

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des cinq questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie sans justifier le choix effectué.
Une bonne réponse rapporte 1 *point Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point*

Pour relier une île au continent, les touristes doivent obligatoirement utiliser une des deux compagnies de ferries A ou B qi se partagent l'ensemble des transports vers cette île.
Une enquête de satisfaction réalisée auprès de touristes s'y étant rendus a produit les résultats suivants :
• 60 % des touristes se rendant sur l'île utilisent la compagnie A, les autres utilisent la compagnie B ;
• parmi les touristes ayant choisi la compagnie A pour se rendre sur l'île, 20 % sont satisfaits de leur transport ;
• 48 % de l'ensemble des touristes sont satisfaits du transport vers l'île.
On interroge au hasard un touriste s'étant rendu sur l'île :

1. La probabilité que ce touriste ait choisi la compagnie A et soit satisfait de son transport est :

   a. 0,08 **b.** 0,12 **c.** 0,24 **d.** 0,88

2. La probabilité que ce touriste ait choisi la compagnie A sachant qu'il est satisfait de son transport est :

   a. 0,34 **b.** 0,20 **c.** 0,25 **d.** 0,83

3. On rappelle que 48 % de l'ensemble des touristes sont satisfaits par le transport vers l'île. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 touristes choisis au hasard et de façon indépendante et ayant visité l'île, associe la fréquence de touristes satisfaits par le transport vers l'île.
   Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de F est :

   a. $[0,382 ; 0,578]$ **b.** $[0,431 ; 0,529]$ **c.** $[0,470 ; 0,490]$ **d.** $[0,475 ; 0,485]$

4. On choisit de modéliser le nombre de touristes satisfaits par le transport vers l'île parmi les 100 touristes choisis au hasard et de façon indépendante par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 48$ et d'écart-type $\sigma = 5$.
   La probabilité, selon ce modèle, qu'il y ait moins de 40 touristes satisfaits est, à 0,001 près :

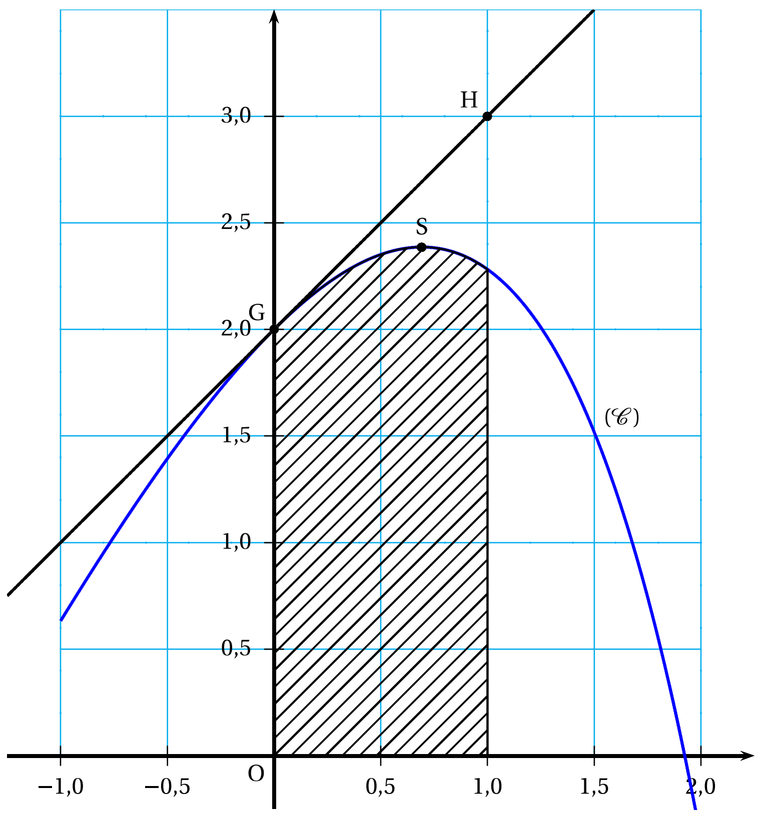
   a. 0,055 **b.** 0,309 **c.** 0,347 **d.** 0,374

5. La durée (en minutes) de la traversée entre le continent et l'île est modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[30\,;\,50]$.
La probabilité que la traversée entre le continent et l'île dure au moins 35 minutes est :

a. 0,25 **b.** 0,35 **c.** 0,70 **d.** 0,75

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et L

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;2]$.



On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Le point G a pour coordonnées $(0\,;2)$.
Le point H a pour coordonnées $(1\,;3)$.
La droite (GH) est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point G.
La courbe $(\mathscr{C})$ admet une tangente horizontale au point S d'abscisse $\ln 2$.
Le domaine hachuré est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie A

Dans cette partie aucune justification n'est demandée. Par lecture graphique :

1. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Résoudre sur $[-1\,;\,2]$ l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$.

3. Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $[-1 ; 2]$ par

$$f(x) = ax + b - \mathrm{e}^x$$

où a et b sont deux réels.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Justifier que $a = 2$ et $b = 3$.

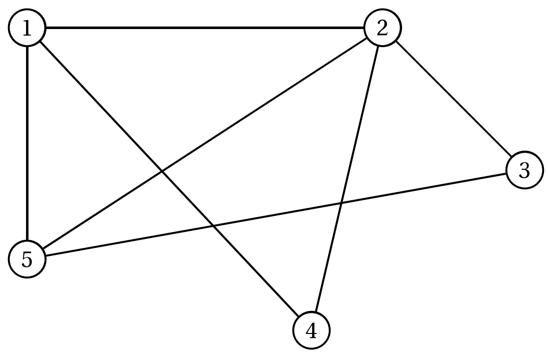
3. Déterminer, sur $[-1 ; 2]$, une primitive F de la fonction f.

4. En déduire la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire du domaine hachuré sur le graphique.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un parc de loisirs propose à ses visiteurs des parcours d'accrobranches.
Les différents parcours sont modélisés par le graphe Γ ci-dessous où les sommets correspondent aux cinq arbres marquant leurs extrémités. Chaque parcours est représenté par une arête du graphe et peut être réalisé dans les deux sens.



1. L'organisateur du parc de loisirs souhaite que les visiteurs puissent, s'ils le souhaitent, réaliser un itinéraire complet d'accrobranches, c'est-à-dire un itinéraire empruntant une fois et une seule chaque parcours et en commençant cet itinéraire par l'arbre numéro 1.

Justifier que ce souhait est réalisable et proposer un tel itinéraire.

2. On note M la matrice associée au graphe Γ en considérant les sommets pris dans l'ordre croissant des numéros d'arbres.

a. Écrire la matrice M.

b. On donne, ci-dessous, les matrices M^2 et M^3.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

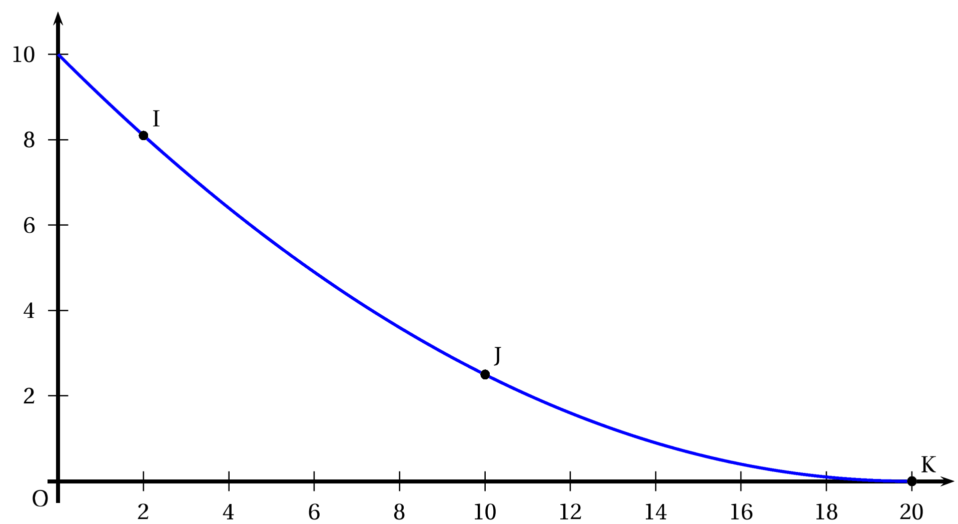
L'organisateur du parc de loisir souhaite organiser des « itinéraires express » qui débuteront à l'arbre numéro 1, emprunteront trois parcours d'accrobranches et finiront à l'arbre 4. Ces itinéraires peuvent éventuellement emprunter plusieurs fois le même parcours.

Déterminer, en justifiant votre résultat, le nombre « d'itinéraires express » réalisables.

(On ne demande pas de donner ces différents itinéraires)

3. Pour terminer ces « itinéraires express », on installe un toboggan géant sur l'arbre 4.

La forme de ce toboggan est modélisée par une fonction f dont la courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Cette courbe passe par les points I, J et K de coordonnées respectives (2 ; 8,1), (10 ; 2,5) et (20 ; 0).

La fonction f est définie sur [0 ; 20] par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont trois nombres réels.

a. Justifier que a, b et c sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{lcl} 400a + 20b + c &=& 0 \\ 100a + 10b + c &=& 2,5 \\ 4a + 2b + c &=& 8,1 \end{array}\right.$

b. Déterminer les matrices X et V pour que le système précédent soit équivalent à

$$UX = V \quad \text{où} \quad U = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. Déterminer a, b et c.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le service commercial d'une société possédant plusieurs salles de sport dans une grande ville a constaté que l'évolution du nombre d'abonnés était définie de la manière suivante :

- chaque année, la société accueille 400 nouveaux abonnés ;

- chaque année 40 % des abonnements de l'année précédente ne sont pas renouvelés.

En 2010 cette société comptait 1 500 abonnés.
On considère la suite (a_n) définie par

$$a_{n+1} = 0,6a_n + 400 \quad \text{et} \quad a_0 = 1500.$$

1. Justifier que la suite (a_n) modélise le nombre d'abonnés pour l'année $2010 + n$.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = a_n - 1000$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
   c. En déduire que : $a_n = 500 \times 0,6^n + 1000$.
3. En 2010 le prix d'un abonnement annuel dans une salle de sport de cette société était de 400 €.
   a. Quelle a été la recette de cette société en 2010 ?
   Chaque année le prix de cet abonnement augmente de 5 %.
   On note P_n le prix de l'abonnement annuel pour l'année $2010 + n$.
   b. Indiquer la nature de la suite (P_n) en justifiant la réponse.
   En déduire l'expression de P_n en fonction de n.
   c. Montrer que, pour l'année $2010 + n$, la recette totale annuelle R_n réalisée par la société pour l'ensemble de ses salles de sport est donnée par :

   $$R_n = \left(500 \times 0,6^n + 1000\right) \times \left(400 \times 1,05^n\right).$$

   d. Trouver, à l'aide de votre calculatrice, l'année où, pour la première fois, la recette de cette société dépassera celle obtenue en 2010.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

On a utilisé un logiciel de calcul formel et on a obtenu les résultats suivants :

1	dériver $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$ $\frac{1-\ln(x)}{x^2}$
2	dériver $\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $-\frac{2}{x^3}$
3	dériver $\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$ $\frac{1-2\ln(x)}{x^3}$

On pourra utiliser les résultats obtenus par ce logiciel pour répondre à certaines questions de l'exercice.
On considère la fonction f définie sur [1 ; 10] par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
La fonction f est deux fois dérivable sur [1 ; 10], on note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Déterminer $f'(x)$ sur [1 ; 10].
   b. Construire le tableau de variation de la fonction f sur [1 ; 10].

2. **a.** Justifier que $f''(x) = \dfrac{2\ln(x) - 3}{x^3}$ sur [1 ; 10].

b. Étudier le signe de f'' sur [1 ; 10].

c. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

3. On considère l'algorithme suivant :

INITIALISATION	
	X PREND LA VALEUR 2
	Y PREND LA VALEUR $\frac{\ln(2)}{2}$
	Z PREND LA VALEUR $\frac{\ln(2,1)}{2,1}$
TRAITEMENT	
	TANT QUE $(Y < Z)$ FAIRE
	X PREND LA VALEUR $X + 0,1$
	Y PREND LA VALEUR $\frac{\ln(X)}{X}$
	Z PREND LA VALEUR $\frac{\ln(X+0,1)}{X+0,1}$
	FIN TANT QUE
SORTIE	
	AFFICHER X

a. Recopier et compléter le tableau suivant où les résultats sont arrondis au dix millième :

X	Y	Z	Test : $Y < Z$
2	0,346 6	0,353 3	vrai
2,1	0,353 3	0,358 4	vrai
2,2	...		

b. Quelle est la valeur affichée en sortie ? Que représente-t-elle pour la fonction f ?