BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2014

MATHÉMATIQUES – Série ES
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L
ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

SUJET

L'usage de la calculatrice est autorisé.

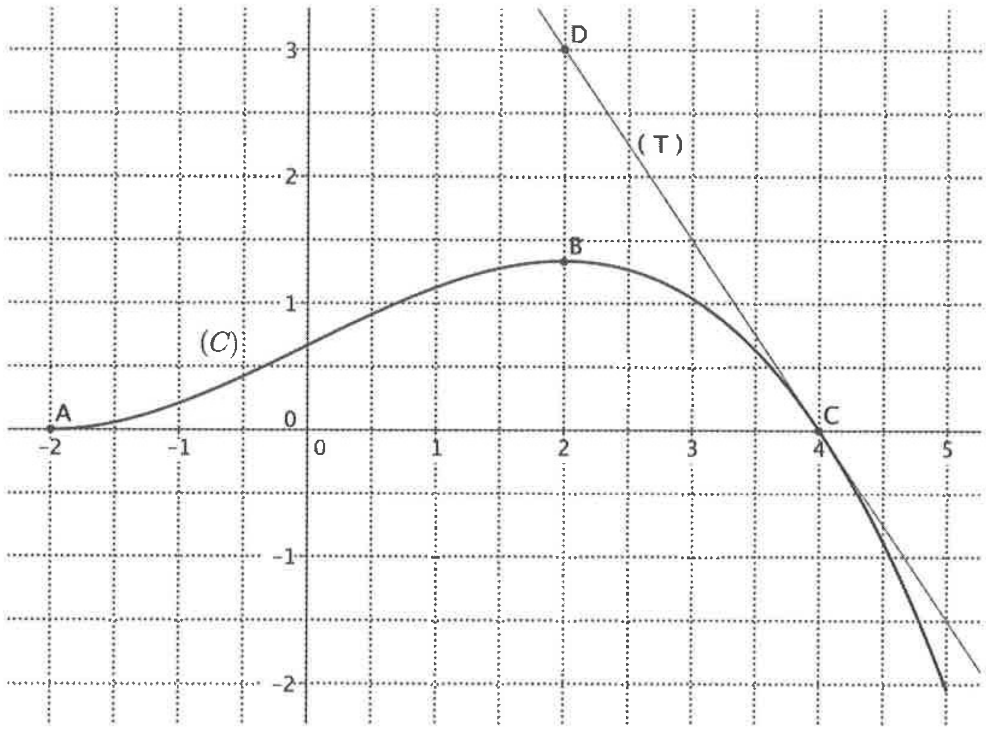
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 5 pages, y compris celle-ci.

Exercice 1 – 4 points

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$, croissante sur $[-2\ ;\ 2]$ et décroissante sur $[2\ ;\ 5]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
La courbe (C) tracée ci-dessous représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé ; elle passe par les points A $(-2\ ;\ 0)$; B $(2\ ;\frac{4}{3})$ et C $(4\ ;\ 0)$.
Elle admet en chacun des points A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses et sa tangente (T) au point C passe par le point D $(2\ ;\ 3)$.



Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. La justification peut reposer sur le graphique ou sur un calcul.

Proposition 1 : $f'(4) = -\frac{2}{3}$

Proposition 2 : La fonction f est concave sur $[-2\ ;\ 2]$.

Proposition 3 : $2 \leq \int_1^3 f(x)\,dx \leq 3$

Proposition 4 : L'équation $f(x) = \ln 2$ n'admet pas de solution sur $[-2\ ;\ 5]$.

Exercice 2 – 5 points

On s'intéresse aux résultats d'un concours où l'on ne peut pas se présenter plus de deux fois.

Partie A : *étude des résultats de mai 2013.*

Les statistiques dressées à partir des résultats de la session de mai 2013 ont permis d'établir que :

- 60 % des personnes qui présentaient le concours le présentaient pour la première fois ;
- 10 % de ceux qui le présentaient pour la première fois ont été admis ;
- 40 % de ceux qui le présentaient pour la seconde fois l'ont réussi.

On interroge au hasard une personne parmi toutes celles ayant passé ce concours en mai 2013.
On note :

- C_1 l'événement : « La personne présentait le concours pour la première fois » ;
- R l'événement : « La personne a été reçue à ce concours ».

On note $\overline{\mathrm{A}}$ l'événement contraire de l'événement A.

1. Déterminer les probabilités suivantes : $\mathrm{P}_{C_1}(\mathrm{R})$; $\mathrm{P}_{\overline{C_1}}(\mathrm{R})$ et $\mathrm{P}(C_1)$.
   Aucune justification n'est attendue.

Pour traiter la suite de l'exercice, on pourra s'aider d'un arbre.

2. Déterminer la probabilité que cette personne se soit présentée au concours pour la première fois et ait été admise.
3. Montrer que la probabilité que cette personne ait été admise à ce concours en mai 2013 est de 0,22.
4. Sachant que cette personne a réussi le concours, déterminer la probabilité qu'elle l'ait présenté pour la première fois. Donner une valeur arrondie au centième.

Partie B : *résultats d'un établissement.*

Dans cette partie, les valeurs numériques sont arrondies au centième.

Dans un établissement, parmi les 224 étudiants inscrits à la préparation à ce concours, 26 % ont été admis à la session de mai 2013.
On admet que dans cette population, on a également 60 % des personnes qui se présentaient pour la première fois.
Le directeur de l'établissement prétend que ce résultat, supérieur au taux de réussite global de 22 %, ne peut être simplement dû au hasard et il affirme que la qualité de l'enseignement dispensé dans son établissement a permis à ses élèves de mieux réussir que l'ensemble des candidats.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % du pourcentage d'étudiants admis dans un groupe de 224 personnes.
2. Que penser de l'affirmation du directeur de l'établissement ? Justifier.

Exercice 3 – 5 points

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.

Partie A

Des relevés statistiques ont permis de modéliser, par une fonction f, le nombre de malades durant l'épidémie.

Cette fonction f est définie sur $[1\,;\,26]$ par : $f(t) = 24t\ln(t) - 3t^2 + 10$ où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[1\,;\,26]$, $f'(t) = 24\ln(t) - 6t + 24$.

2. Les variations de la fonction f' sont données dans le tableau suivant.

t	1		4		26
$f'(t)$		↗		↘	

   a. Montrer que l'équation $f'(t) = 0$ admet, dans l'intervalle $[1\,;\,26]$, une solution et une seule qu'on notera α et donner l'encadrement de α par deux entiers naturels consécutifs.

   b. En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[1\,;\,26]$ et les variations de f sur $[1\,;\,26]$.

3. Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.

   a. Dans le contexte du problème, donner une interprétation de l'expression mathématique suivante : sur $[4\,;\,26]$, f' est décroissante.

   b. À partir des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer.

Partie B

On admet que la fonction G définie par : $G(t) = 12t^2\ln(t) - 6t^2$ est une primitive sur $[1\,;\,26]$ de la fonction g définie par : $g(t) = 24t\ln(t)$.

1. Déterminer, sur $[1\,;\,26]$, une primitive F de la fonction f.

2. On a trouvé que l'arrondi à l'entier de $\frac{1}{26-1}\,[F(26) - F(1)]$ est 202. Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte du problème.

Exercice 4 – 6 points

On étudie l'évolution de la population d'une ville, depuis le 1er janvier 2008.

Partie A : *un premier modèle.*

Pour cette partie, on admet que la population augmente de 3,5 % par an depuis le 1er janvier 2008.

1. Déterminer le pourcentage d'augmentation de la population entre le 1er janvier 2008 et le 1er janvier 2014. Donner une réponse à 0,1% près.

2. À partir de 2008, on modélise la population de cette ville au 1er janvier à l'aide d'une suite :
   Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants, exprimé en centaines de milliers d'habitants, au 1er janvier de l'année 2008 + n.
   Au 1er janvier 2008, cette ville comptait 100 000 habitants.
   a. Que vaut u_0 ?
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1{,}035^n$.
   c. Suivant ce modèle, en quelle année la population aura-t-elle doublé ? Justifier la réponse.

Partie B : *un second modèle.*

On modélise la population de cette ville à partir du 1er janvier 2008 par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{3}{1+2e^{-0{,}05x}}$ où x désigne le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2008 et $f(x)$ le nombre d'habitants en centaines de milliers.

On admet que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation:	X prend la valeur 0
Traitement :	Tant que $f(X) \leq 2$
	X prend la valeur X +1
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

Si l'on fait fonctionner cet algorithme, alors le résultat affiché en sortie est 28. Interpréter ce résultat dans le contexte de ce problème.