BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2013

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question ci-après comporte quatre réponses possibles. Pour chacune de ces questions, ***une seule*** *des quatre réponses proposées est* ***exacte****.*
Recopier pour chaque question la réponse exacte, ***on ne demande pas de justification****.*
Chaque réponse exacte rapportera 1 point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1) Pour tout réel a non nul, le nombre réel $e^{-\frac{1}{a}}$ est égal à :

a) $-e^{\frac{1}{a}}$ **b)** $\dfrac{1}{e^{\frac{1}{a}}}$ **c)** $\dfrac{1}{e^{a}}$ **d)** e^{a}

2) Pour tout réel a, le nombre réel $e^{\frac{a}{2}}$ est égal à :

a) $\sqrt{e^{a}}$ **b)** $\dfrac{e^{a}}{2}$ **c)** $\dfrac{e^{a}}{e^{2}}$ **d)** $e^{\sqrt{a}}$

3) Pour tout réel $x < 0$, le nombre réel $\ln(-\frac{1}{x})$ est égal à :

a) $\ln(x)$ **b)** $-\ln(-x)$ **c)** $-\ln(x)$ **d)** $\dfrac{1}{\ln(-x)}$

4) On donne la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.
La dérivée de f est définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par :

a) $f'(x) = 1$ **b)** $f'(x) = \ln(x)$ **c)** $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ **d)** $f'(x) = \ln(x) + 1$

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

1) Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X, qui suit la loi normale de moyenne 40,5 et d'écart type 12.

a) Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans.

b) Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans.

2) Dans un slogan publicitaire, la banque affirme que 75 % des demandes de prêts immobiliers sont acceptées.
Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 demandes choisies au hasard et de façon indépendante, associe la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées.

a) Donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de prêts acceptés par la banque.

b) Dans une agence de cette banque, on a observé que, sur les 1000 dernières demandes effectuées, 600 demandes ont été acceptées.
Énoncer une règle de décision permettant de valider ou non le slogan publicitaire de la banque, au niveau de confiance 95 %.

c) Que peut-on penser du slogan publicitaire de la banque ?

EXERCICE 3 (5 points)

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

Léa est inscrite sur les réseaux sociaux et consulte régulièrement sa page.

On considère que :

- Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,9.
- Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,8.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note a_n la probabilité que Léa se connecte le n-ième jour et b_n la probabilité qu'elle ne se connecte pas le n-ième jour.
On a donc : $a_n + b_n = 1$.

Le 1er jour, Léa ne s'est pas connectée, on a donc $a_1 = 0$.

1) a) Traduire les données par un graphe probabiliste.

b) Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.

c) Déterminer la probabilité que Léa se connecte le troisième jour.

2) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}8$.

3) On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = a_n - \dfrac{8}{9}$.

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

b) Exprimer u_n puis a_n en fonction de n.

4) a) Déterminer en justifiant la limite de (a_n).

b) Interpréter ce résultat.

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.

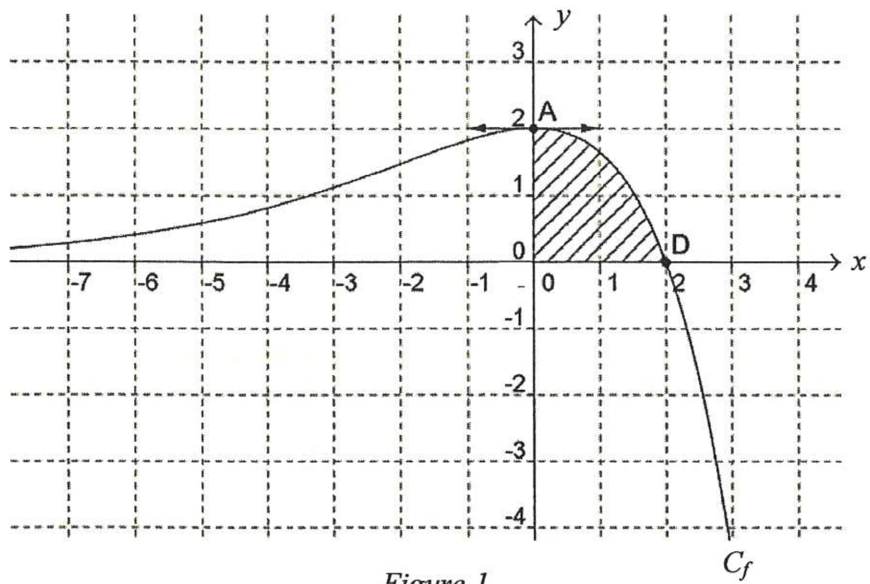

Figure 1

Partie A

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b - x)e^{ax}$ où a et b désignent deux constantes.
On sait que :

- Les points A(0 ; 2) et D(2 ; 0) appartiennent à la courbe C_f.
- La tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f, définie sur $\mathbb{R}$.

1) Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.

2) Calculer $f'(x)$.

3) En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} b - 2 = 0 \\ ab - 1 = 0 \end{cases}$$

4) Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.

Partie B

On admet que $f(x) = (-x+2)\,\mathrm{e}^{0,5x}$.

1) À l'aide de la figure 1, justifier que la valeur de l'intégrale $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre 2 et 4.

2) a) On considère F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x+8)\mathrm{e}^{0,5x}$.
Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer la valeur exacte de $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3) On considère G une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Parmi les trois courbes C_1, C_2 et C_3 ci-dessous, une seule est la représentation graphique de G.
Déterminer la courbe qui convient et justifier la réponse.

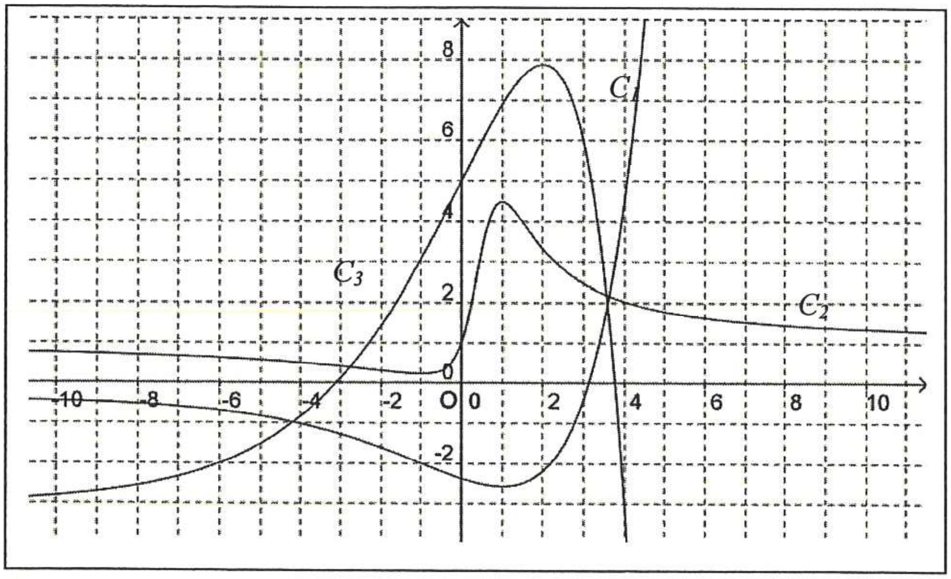

Figure 2