La propriété de linéarité de l'espérance mathématique

La propiété

Voici cette propriété de linéarité énoncée avec sa formule générale

Pour tout nombre a et b réels, on aura $E(ax+b) = aE(x) + b$

On peut rapidement résumer cette propriété avec des exemples tirés de situations concrètes :

- si un organisateur décide de multiplier les gains d'un jeu par 2 , alors l'*espérance* (et donc la *moyenne* des gains) sera également multipliée par 2.
- si un organisateur décide d'ajouter 5 euros aux gains d'un jeu , alors l'*espérance* (et donc la *moyenne* des gains) sera également augmentée de 5 euros.

Exemple

Le mieux est de voir un exemple pour lequel on va appliquer cette propriété de linéarité, tout en faisant une vérification, en calculant directement l'espérance mathématique.

On reprend la situation avec 10 jetons dans un sac (1 jeton rouge, 2 jetons bleus et 7 jetons verts).

Si on tire un jeton rouge , alors on ***gagne*** 9 euros.	Si on tire un jeton bleu, alors on ***gagne*** 4 euros.	Si on tire un jeton vert, alors on ***perd*** 3 euros.

On note X la variable aléatoire qui nous donne le gain (algébrique) correspondant à la couleur du jeton.

Dans une fiche précédente , on a vu que l'espérance était alors égale à – 0,4 euros.

On va considérer alors que l'organisateur décide de multiplier les gains de son jeu par 3 , tout en ajoutant 1 euro de prime.

→ on va appliquer la propriété de linéarité

La nouvelle variable aléatoire sera définie par : $3X + 1$

On pourra alors écrire $E(3X+1) = 3E(X) + 1$

L'espérance du jeu devient $3 \times (-0,4) + 1 = -0,2$ euros

→ le jeu reste favorable pour l'organisateur.

→ on peut vérifier ce résultat en écrivant la loi de probabilité correspondante à cette nouvelle situation

Les nouvelles valeurs prises par la variable aléatoire sont :

28 (qui correspond à 3×9 € $+ 1$ €)

13 (qui correspond à 3×4 € $+ 1$ €)

-8 (qui correspond à $3 \times (-3$ €$) + 1$ €)

On a : $p(X=-8) = \frac{7}{10} = 0,7$; $p(X=13) = \frac{2}{10} = 0,2$; $p(X=28) = \frac{1}{10} = 0,1$

(jeton vert) (jeton bleu) (jeton rouge)

La loi de probabilité sécrira

Variable aléatoire x_i	-8	13	28
Probabilités p_i	0,7	0,2	0,1

On calcule alors l'espérance mathématique

$$E(X) = -8 \times 0,7 + 13 \times 0,2 + 28 \times 0,1 = -0,2 \text{ (euros)}$$