

La propriété de linéarité de la variance et de l'écart type

La propriété de la variance et de l'écart type

Voici cette propriété de linéarité énoncée avec ses formules générales

Pour tout nombre a réel, on aura $V(ax) = a^2 V(x)$

Pour tout nombre a réel, on aura $\sigma(ax) = |a| \sigma(x)$ (c'est bien la valeur absolue de a)

On peut rapidement résumer cette propriété avec des exemples tirés de situations concrètes :

- si un organisateur décide de multiplier les gains d'un jeu par 3, alors la *variance* sera multipliée par 9 et l'*écart type* sera multiplié par 3.
- si un organisateur décide de diviser les gains d'un jeu par 2 (et donc de les multiplier par 0,5), alors la *variance* sera divisée par 4 et l'*écart type* sera divisée par 2.

Des exemples

On reprend l'exemple utilisé dans la fiche donnant la méthode de calcul de la variance et de l'écart type.

On prend une situation avec 10 jetons dans un sac (1 jeton rouge, 2 jetons bleus et 7 jetons verts).

Si on tire un jeton rouge,
alors on *gagne* 9 euros.

Si on tire un jeton bleu,
alors on *gagne* 4 euros.

Si on tire un jeton vert,
alors on *perd* 3 euros.

On note X la variable aléatoire qui nous donne le gain (algébrique) correspondant à la couleur du jeton.

On avait obtenu $V(X) = 17,44$ et $\sigma(X) \approx 4,18$ euros.

→ si l'organisateur décide de multiplier les gains par 3

On multiplie la variance par 9 et l'écart type par 3.

$$\text{On aura : } V(3X) = 3^2 \times V(X) = 9 V(X) = 156,96$$

$$\text{et } \sigma(3X) = 3\sigma(X) \approx 12,54 \text{ euros.}$$

→ si l'organisateur décide de multiplier les gains par 0,5 (et donc de les diviser par 2)

On multiplie la variance par 0,25 et l'écart type par 0,5.

$$\text{On aura : } V(0,5X) = 0,5^2 \times V(X) = 0,25 V(X) = 4,36$$

$$\text{et } \sigma(0,5X) = 0,5\sigma(X) \approx 2,09 \text{ euros.}$$

Un dernier exemple avec un nombre a négatif

On va imaginer une situation pour laquelle la variance est égale à 36. L'écart type est donc égale à 6.

Si on décide de multiplier la variable aléatoire par -5 alors :

On multiplie la variance par 25 et l'écart type par 5.

$$\text{On aura : } V(-5X) = (-5)^2 \times V(X) = 25 V(X) = 25 \times 36 = 900$$

$$\text{et } \sigma(-5X) = |-5| \times \sigma(X) = 5\sigma(X) = 5 \times 6 = 30.$$