Comment calculer la variance et l'écart type d'une loi de probabilité

La *variance* et l'*écart type* sont des indicateurs de *dispersion*.
Ils permettent de mesurer l'homogénéité ou l'hétérogénéité des valeurs prises par une variable aléatoire.
Dans le cadre d'un jeu, on dira que "***plus l'écart type est grand, plus le jeu est risqué***".

Lien entre variance et écart type

L'écart type ne se calcule pas directement. Pour l'obtenir, il nous faut d'abord calculer la variance V(X) de la variable aléatoire et , ensuite, l'écart type σ (X) sera égal à la *racine carrée de la variance*.

On calcule $V(X)$, et on a $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Calcul de la variance (et donc de l'écart type)

Il est utile de faire au moins une fois ces calculs "à la main". Cela permet de donner du sens à ces indicateurs. Etant entendu que par la suite, la calculatrice nous donnera très efficacement ces réponses.

Définition : c'est la première formule

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = p_1(x_1 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2$$

Propriété : c'est la deuxième formule

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

il faut ici calculer $E(X^2)$, espérance de la variable X^2.

Exemple

On reprend la situation avec 10 jetons dans un sac (1 jeton rouge, 2 jetons bleus et 7 jetons verts).

Si on tire un jeton rouge , alors on ***gagne*** 9 euros.	Si on tire un jeton bleu, alors on ***gagne*** 4 euros.	Si on tire un jeton vert, alors on ***perd*** 3 euros.

On note *X* la variable aléatoire qui nous donne le gain (algébrique) correspondant à la couleur du jeton.

→ ***on calcule la VARIANCE, avec la première formule liée à la définition.***

Variable aléatoire x_i	-3	4	9
Probabilités p_i	$0{,}7$	$0{,}2$	$0{,}1$

On retrouve $E(X) = -3 \times 0{,}7 + 4 \times 0{,}2 + 9 \times 0{,}1 = -0{,}4$ (euros)

et on a : $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + p_3(x_3 - E(X))^2$

$= 0{,}7(-3-(-0{,}4))^2 + 0{,}2(4-(-0{,}4))^2 + 0{,}1(9-(-0{,}4))^2$

$= 0{,}7 \times (-2{,}6)^2 + 0{,}2 \times (4{,}4)^2 + 0{,}1 \times (9{,}4)^2$

On obtient : $V(X) = 17{,}44 \longrightarrow \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 4{,}18$ euros.

→ ***on calcule la VARIANCE, avec la deuxième formule liée à la propriété.***

Variable aléatoire $(x_i)^2$	9	16	81
Probabilités p_i	$0{,}7$	$0{,}2$	$0{,}1$

on met la variable au carré !

On a : $E(X^2) = 9 \times 0{,}7 + 16 \times 0{,}2 + 81 \times 0{,}1 = 17{,}6$

Donc on a : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 17{,}6 - (-0{,}4)^2 = 17{,}44$

On obtient donc $V(X) = 17{,}44$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 4{,}18$ euros.