

Comment calculer l'espérance mathématique d'une loi de probabilité

Définition

Lorsque l'on connaît la loi de probabilité d'une variable aléatoire X avec un tableau du type

Variable aléatoire x_i	x_1	x_2	x_3	\dots	x_n
Probabilités p_i	p_1	p_2	p_3	\dots	p_n

on pourra calculer l'espérance mathématique $E(X)$ avec la formule suivante :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n$$

"sigma" qui correspond à faire la somme pour les indices de 1 à n

Exemple

On reprend la situation avec 10 jetons dans un sac (1 jeton rouge, 2 jetons bleus et 7 jetons verts).

Si on tire un jeton rouge , alors on gagne 9 euros.	Si on tire un jeton bleu, alors on gagne 4 euros.	Si on tire un jeton vert, alors on perd 3 euros.
---	---	--

On note X la variable aléatoire qui nous donne le gain (algébrique) correspondant à la couleur du jeton.

Les valeurs prises par la variable aléatoire sont : -3 ; 4 ; 9

On a : $p(X=-3) = \frac{7}{10} = 0,7$; $p(X=4) = \frac{2}{10} = 0,2$; $p(X=9) = \frac{1}{10} = 0,1$

(jeton vert) (jeton bleu) (jeton rouge)

La loi de probabilité s'écrira :

Variable aléatoire x_i	-3	4	9
Probabilités p_i	0,7	0,2	0,1

On calcule l'espérance mathématique :

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$$

$$= -3 \times 0,7 + 4 \times 0,2 + 9 \times 0,1 = -0,4 \text{ (euros)}$$

Conséquences :

→ L'espérance mathématique est ici égale à -0,4 euros. Cela signifie que le jeu n'est pas équitable (le gain pour le joueur est négatif et le jeu est défavorable pour le joueur , et donc favorable à l'organisateur).

→ Au moment de jouer une partie, le joueur a une espérance de gain égale à -0,4 euros. Cela ne veut pas dire que le joueur perdra à chaque fois 0,4 euros. Ce gain ne correspond pas à une réalité, cela correspond plutôt à une moyenne sur un très grand nombre de parties. Mais le joueur peut aussi jouer trois parties et gagner 9 euros à chaque fois !

→ Donc, si il y a 10 000 joueurs qui jouent, chacun aura une espérance égale à -0,4 euros. Pour la totalité des joueurs, cela amène une espérance de gain égal à $10\,000 \times (-0,4) = -4\,000$ euros. L'organisateur peut donc espérer gagner en moyenne 4 000 euros, si il y a 10 000 joueurs !!