

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

## MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

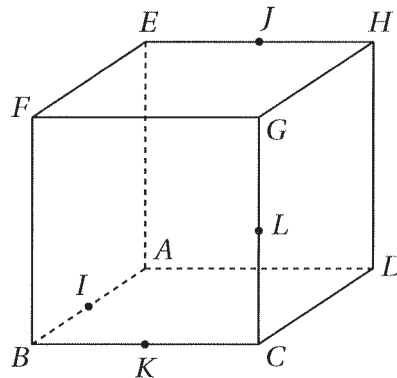
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. **Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.** Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

**EXERCICE 1 (6 points)**

$ABCDEFGH$  est un cube.



$I$  est le milieu du segment  $[AB]$ ,  $J$  est le milieu du segment  $[EH]$ ,  $K$  est le milieu du segment  $[BC]$  et  $L$  est le milieu du segment  $[CG]$ .

On munit l'espace du repère orthonormé  $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$ .

1. a) Démontrer que la droite  $(FD)$  est orthogonale au plan  $(IJK)$ .  
 b) En déduire une équation cartésienne du plan  $(IJK)$ .
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(FD)$ .
3. Soit  $M$  le point d'intersection de la droite  $(FD)$  et du plan  $(IJK)$ . Déterminer les coordonnées du point  $M$ .
4. Déterminer la nature du triangle  $IJK$  et calculer son aire.
5. Calculer le volume du tétraèdre  $FIJK$ .
6. Les droites  $(IJ)$  et  $(KL)$  sont-elles sécantes ?

**EXERCICE 2 (6 points)**

On définit la suite  $(u_n)$  de la façon suivante : pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .

1. Calculer  $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ .
2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$ .  
 b) En déduire la valeur exacte de  $u_1$ .
3. a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang  $n$  de la suite  $(u_n)$  où  $n$  est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	$i$ et $n$ sont des entiers naturels $u$ est un réel
Entrée :	Saisir $n$
Initialisation :	Affecter à $u$ la valeur ...
Traitement :	Pour $i$ variant de 1 à ...   Affecter à $u$ la valeur ... Fin de Pour
Sortie :	Afficher $u$

b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

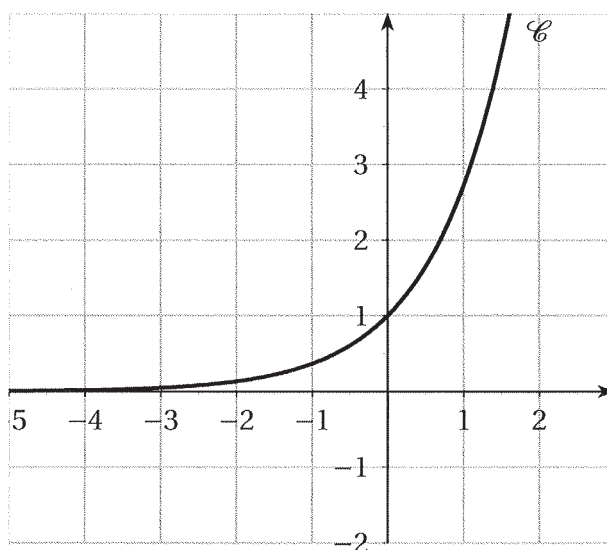
$n$	0	1	2	3	4	5	10	50	100
$u_n$	0,6931	0,3069	0,1931	0,1402	0,1098	0,0902	0,0475	0,0099	0,0050

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite  $(u_n)$  peut-on émettre ?

4. a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.  
b) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.
5. On appelle  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)$ . Démontrer que  $\ell = 0$ .

### EXERCICE 3 (3 points)

On considère la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation  $y = e^x$ , tracée ci-dessous.



Pour tout réel  $m$  strictement positif, on note  $\mathcal{D}_m$  la droite d'équation  $y = mx$ .

1. Dans cette question, on choisit  $m = e$ .  
Démontrer que la droite  $\mathcal{D}_e$ , d'équation  $y = ex$ , est tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en son point d'abscisse 1.
2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif  $m$ , le nombre de points d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite  $\mathcal{D}_m$ .
3. Démontrer cette conjecture.

#### EXERCICE 4 (5 points)

##### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle  $p_n$  la probabilité de ne pas fumer le  $n$ -ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et  $q_n$  la probabilité de fumer le  $n$ -ième jour après sa décision d'arrêter de fumer.

On suppose que  $p_0 = 0$  et  $q_0 = 1$ .

1. Calculer  $p_1$  et  $q_1$ .
2. On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$ . Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous :

	A	B	C	D
1	$n$	$p_n$	$q_n$	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			

Dans la colonne A figurent les valeurs de l'entier naturel  $n$ .

Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$  ?

3. On définit les matrices  $M$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_n$  par

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

On admet que  $X_{n+1} = M \times X_n$  et que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_n = M^n \times X_0$ .

On définit les matrices  $A$  et  $B$  par  $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ .

- a) Démontrer que  $M = A + 0,5B$ .
- b) Vérifier que  $A^2 = A$ , et que  $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

On admet dans la suite que, pour tout entier naturel  $n$  strictement positif,  $A^n = A$  et  $B^n = B$ .

- c) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $M^n = A + 0,5^n B$ .
- d) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$ .
- e) À long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?