BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Les parties A, B et C sont indépendantes

Une fabrique de desserts glacés dispose d ?une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

Partie A

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de $2\ 000$ pour la vente en gros.
On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à 0,003.

On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de $2\ 000$ cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot.

On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

1) Quelle est la loi suivie par X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

2) Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci.
Déterminer la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé ; le résultat sera arrondi au millième.

Partie B

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de crème glacée qu'il contient.

On suppose que Y suit une loi normale $\mathcal{N}(110; \sigma^2)$, d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type σ.
Une glace est considérée comme commercialisable lorsque la masse de crème glacée qu'elle contient appartient à l'intervalle $[104; 116]$.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du paramètre σ telle que la probabilité de l'évènement « la glace est commercialisable » soit égale à $0,98$.

Partie C

Une étude réalisée en l'an 2000 a permis de montrer que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces était de $84\ \%$.
En 2010, sur 900 personnes interrogées, 795 d'entre elles déclarent consommer des glaces.

Peut-on affirmer, au niveau de confiance de $95\ \%$ et à partir de l'étude de cet échantillon, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010 ?

EXERCICE 2 (5 points)

(commun à tous les candidats)

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Dans les question **1)** et **2)**, le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

1) Affirmation 1.

Le point d'affixe $(-1+i)^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.

2) Affirmation 2.

Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

$$z - \overline{z} + 2 - 4i$$

admet une solution unique.

3) Affirmation 3.

$\ln\left(\sqrt{e^7}\right) + \dfrac{\ln\left(e^9\right)}{\ln\left(e^2\right)} = \dfrac{e^{\ln 2 + \ln 3}}{e^{\ln 3 - \ln 4}}.$

4) Affirmation 4.

$\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx = -\ln\left(\frac{3}{5}\right).$

5) Affirmation 5.

L'équation $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On donne les points $A(1; 0; -1)$, $B(1; 2; 3)$, $C(-5; 5; 0)$, $D(11; 1; -2)$.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.
Le point K est défini par $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

b) Démontrer que les points I, J et K définissent un plan.

c) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(3; 1; 4)$ est un vecteur normal au plan (IJK).
En déduire une équation cartésienne de ce plan.

2) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3x + y + 4z - 8 = 0$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BD).

b) Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite (BD) sont sécants et donner les coordonnées de L, point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (BD).

c) Le point L est-il le symétrique du point D par rapport au point B ?

EXERCICE 4 (5 points)

(candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité)

On considère l'algorithme suivant, où A et B sont des entiers naturels tels que $A < B$:

Entrées	A et B entiers naturels tels que $A < B$
Variables	D est un entier Les variables d'entrées A et B

Traitement	Affecter à D la valeur de $B - A$
	Tant que $D > 0$
	   B prend la valeur de A
	   A prend la valeur de D
	      Si $B > A$ alors
	         D prend la valeur de $B - A$
	      Sinon
	         D prend la valeur de $A - B$
	      Fin Si
	Fin Tant que

Sortie	Afficher A

1) On entre $A = 12$ et $B = 14$.
En remplissant le tableau donné en **annexe**, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

2) Cet algorithme calcule la valeur du PGCD des nombres A et B.
En entrant $A = 221$ et $B = 331$, l'algorithme affiche la valeur 1.

a) Justifier qu'il existe des couples $(x; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation

$$(E) \quad 221x - 331y = 1.$$

b) Vérifier que le couple $(3; 2)$ est une solution de l'équation (E).
En déduire l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3) On considère les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 2 + 221n \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + 331 \end{cases}.$$

a) Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.

b) Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(p; q)$ tels que $u_p = v_q$, $0 \leqslant p \leqslant 500$ et $0 \leqslant q \leqslant 500$.

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Annexe, Exercice 4

A	B	D
12	14	