BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2014

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

OBLIGATOIRE

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 / 6 à 6 / 6.
Une annexe, en page 6 / 6, est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (5 points)

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.
Les probabilités seront arrondies au dix millième.

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8h00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

Partie A

L'élève part tous les jours à 7h40 de son domicile et doit arriver à 8h00 à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.
Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4 % des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas.
On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'événement « *l'élève se rend au lycée à vélo* », B l'événement « *l'élève se rend au lycée en bus* » et R l'événement « *l'élève arrive en retard au lycée* ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'événement $V \cap R$.
3. Démontrer que la probabilité de l'événement R est 0,019 2.
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Partie B : le vélo

On suppose dans cette partie que l'élève utilise le vélo pour se rendre à son lycée.
Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.

1. Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.
2. Il part de son domicile à vélo à 7h40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?
3. L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de 0,9 ? Arrondir le résultat à la minute près.

Partie C : le bus

Lorsque l'élève utilise le bus, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ'.
On sait que la probabilité qu'il mette plus de 20 minutes pour se rendre à son lycée en bus est de 0,05.
On note Z' la variable aléatoire égale à $\dfrac{T' - 15}{\sigma'}$.

1. Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'écart-type σ' de la variable aléatoire T'.

EXERCICE 2 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$

et la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

On donne les points $A(1\,;1\,;0)$, $B(3\,;0\,;-1)$ et $C(7\,;1\,;-2)$.

Proposition 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

Proposition 2 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 :
La droite $\mathscr{D}$ coupe le plan $\mathscr{P}$ au point E de coordonnées $(8\,;-3\,;-4)$.

Proposition 5 :
Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles.

EXERCICE 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

Partie A

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

Partie B

Soit $\mathscr{A}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de la façon suivante : pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $\mathscr{A}(t)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$.

2. On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction $\mathscr{A}$?

3. On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel α tel que la droite d'équation $x = \alpha$ partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, en deux parties de même aire, et à trouver une valeur approchée de ce réel.

   a) Démontrer que l'équation $\mathscr{A}(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

   b) Sur le graphique fourni en **annexe** (***à rendre avec la copie***) sont tracées la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que la courbe Γ représentant la fonction $\mathscr{A}$.
   Sur le graphique de l'**annexe**, identifier les courbes $\mathscr{C}$ et Γ, puis tracer la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$. En déduire une valeur approchée du réel α. Hachurer le domaine correspondant à $\mathscr{A}(\alpha)$.

4. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

   a) On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, calculer $g'(x)$.

   b) En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, une expression de $\mathscr{A}(t)$.

   c) Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathscr{A}(6)$.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1 + \mathrm{i})z_n$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.
   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + \mathrm{i}$.
   En déduire la forme exponentielle de z_1.
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.