

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Spécifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Une entreprise est spécialisée dans la fabrication de ballons de football. Cette entreprise propose deux tailles de ballons :

- une petite taille,
- une taille standard.

Les trois parties suivantes sont indépendantes.

Partie A

Un ballon de football est conforme à la réglementation s'il respecte, suivant sa taille, deux conditions à la fois (sur sa masse et sur sa circonférence).

En particulier, un ballon de taille standard est conforme à la réglementation lorsque sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle $[410; 450]$ et sa circonférence, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle $[68; 70]$.

- 1) On note X la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise, associe sa masse en grammes.

On admet que X suit la loi normale d'espérance 430 et d'écart type 10.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité $P(410 \leq X \leq 450)$.

- 2) On note Y la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise associe sa circonférence en centimètres.

On admet que Y suit la loi normale d'espérance 69 et d'écart type σ .

Déterminer la valeur de σ , au centième près, sachant que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation.

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, alors $P(-\beta \leq Z \leq \beta) = 0,97$ pour $\beta \approx 2,17$.

Partie B

L'entreprise affirme que 98 % de ses ballons de taille standard sont conformes à la réglementation. Un contrôle est alors réalisé sur un échantillon de 250 ballons de taille standard. Il est constaté que 233 d'entre eux sont conformes à la réglementation.

Le résultat de ce contrôle remet-il en question l'affirmation de l'entreprise ? Justifier la réponse. (On pourra utiliser l'intervalle de fluctuation)

Partie C

L'entreprise produit 40 % de ballons de football de petite taille et 60 % de ballons de taille standard. On admet que 2 % des ballons de petite taille et 5 % des ballons de taille standard ne sont pas conformes à la réglementation. On choisit un ballon au hasard dans l'entreprise.

On considère les événements :

A : « le ballon de football est de petite taille »,

B : « le ballon de football est de taille standard »,

C : « le ballon de football est conforme à la réglementation » et \bar{C} , l'évènement contraire de C .

- 1) Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilité.

- 2) Calculer la probabilité que le ballon de football soit de petite taille et soit conforme à la réglementation.
- 3) Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,962.
- 4) Le ballon de football choisi n'est pas conforme à la réglementation. Quelle est la probabilité que ce ballon soit de petite taille ? On arrondira le résultat à 10^{-3} .

EXERCICE 2 (4 points)

(commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est correcte. Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'enlève pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

1) Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(2; 5; -1)$, $B(3; 2; 1)$ et $C(1; 3; -2)$. Le triangle ABC est :

- a) rectangle et non isocèle
- b) isocèle et non rectangle
- c) rectangle et isocèle
- d) équilatéral

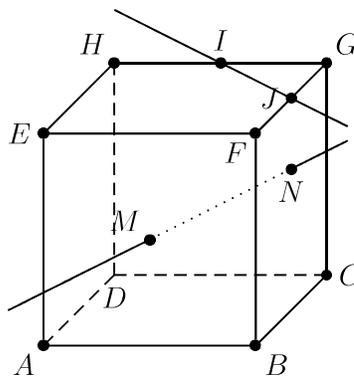
2) Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan P d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$ et le point $A(2; 5; -1)$. Une représentation paramétrique de la droite d , perpendiculaire au plan P et passant par A est :

$$\text{a) } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 5t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 5 - 3t \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

3) Soit A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est :

- a) l'ensemble vide
- b) la médiatrice du segment $[AB]$
- c) le cercle de diamètre $[AB]$
- d) la droite (AB)

4) La figure ci-dessous représente un cube $ABCDEFGH$. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[GH]$ et $[FG]$. Les points M et N sont les centres respectifs des faces $ABFE$ et $BCGF$.



Les droites (IJ) et (MN) sont :

- a) perpendiculaires
- b) sécantes, non perpendiculaires
- c) orthogonales
- d) parallèles

EXERCICE 3 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

- 1) Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2 .
- 2) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4 .
- 3) Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n , par : $v_n = u_n - 3$.

- 1) Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
- 2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-1 \leq v_n \leq 0$.
- 3) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right)$.
b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .
- 4) Pourquoi peut-on affirmer que la suite (v_n) converge ?
- 5) On note ℓ la limite de la suite (v_n) .
On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1; 0]$ et vérifie l'égalité $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.
Déterminer la valeur de ℓ .
- 6) Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées ?

EXERCICE 4 (5 points)

(commun à tous les candidats)

On désire réaliser un portail comme indiqué à l'annexe 1. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.

Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right) e^{-4x} + b.$$

ou b est un nombre réel. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$.

- 1) a) Calculer $f'(x)$, pour tout réel appartenant à l'intervalle $[0; 2]$.
- b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$.
- 2) Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.

Dans la suite, la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right) e^{-4x} + \frac{5}{4}.$$

Partie B : détermination d'une aire

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à 0,05 m de hauteur du sol.

- 1) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$F(x) = \left(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right) e^{-4x} + \frac{5}{4}x$$

est une primitive de la fonction f .

- 2) En déduire l'aire en m^2 de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire. (On s'intéresse ici à l'objet « vantail » sans faire référence à son environnement).

Partie C : utilisation d'un algorithme

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail (voir l'annexe 2 de l'exercice 4) et le bas de chaque planche est à 0,05 m de hauteur. Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.

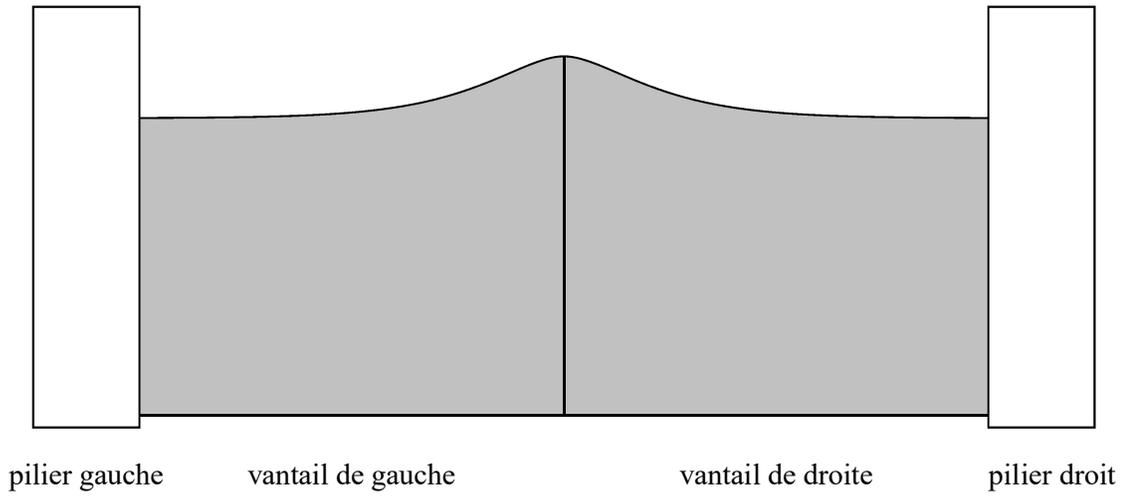
- 1) Donner l'aire de la planche numéro k .

2) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

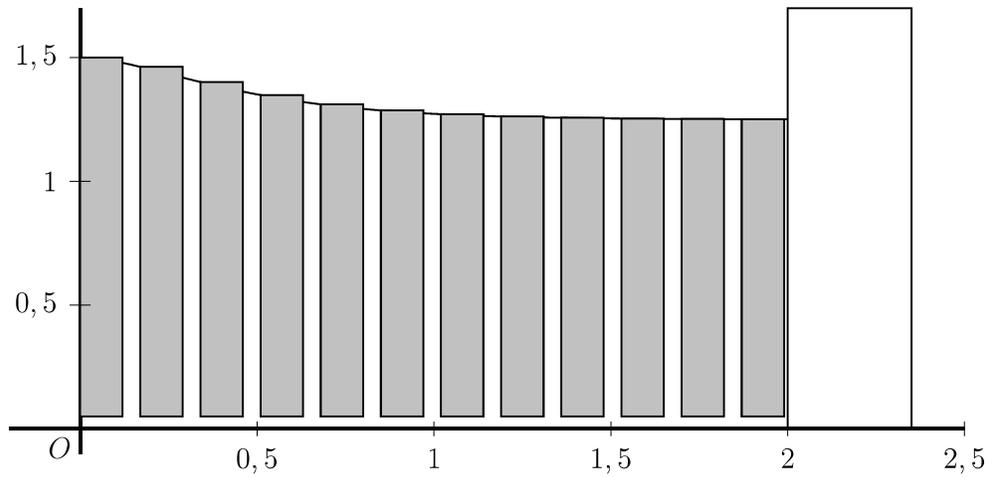
Variables :	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation :	On affecte à S la valeur 0 On affecte à X la valeur 0
Traitement :	Tant que $X + 0,17 < \dots$ S prend la valeur $S + \dots$ X prend la valeur $X + 0,17$ Fin de Tant que
Sortie :	Afficher S

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Annexe 1, Exercice 4



Annexe 2, Exercice 4



La distance entre le bas du portail et le sol est de 0,05 m