

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2013

## MATHÉMATIQUES

### SÉRIE S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire  
n°99-186 du 16 novembre 1999.

\*\_\*\_\*\_\*

**Le candidat doit traiter les quatre exercices**

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

**Exercice 1 (6 points)**  
Commun à tous les candidats

Un industriel fabrique des vannes électroniques destinées à des circuits hydrauliques.

Les quatre parties A, B, C, D sont indépendantes.

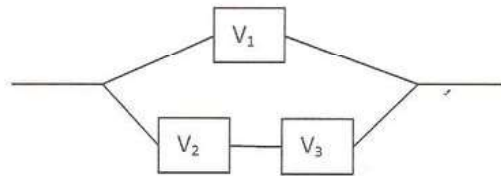
**Partie A**

La durée de vie d'une vanne, exprimée en heures, est une variable aléatoire  $T$  qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,0002$ .

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une vanne ?
2. Calculer la probabilité, à 0,001 près, que la durée de vie d'une vanne soit supérieure à 6000 heures.

**Partie B**

Avec trois vannes identiques  $V_1, V_2, V_3$ , on fabrique le circuit hydraulique ci-contre.



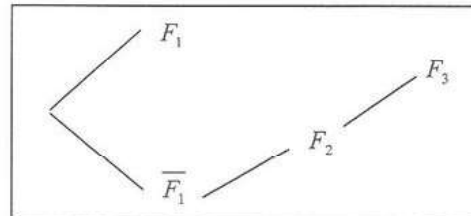
Le circuit est en état de marche si  $V_1$  est en état de marche ou si  $V_2$  et  $V_3$  le sont simultanément.

On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après 6000 heures. On note :

- $F_1$  l'événement : « la vanne  $V_1$  est en état de marche après 6000 heures » ;
- $F_2$  l'événement : « la vanne  $V_2$  est en état de marche après 6000 heures » ;
- $F_3$  l'événement : « la vanne  $V_3$  est en état de marche après 6000 heures » ;
- $E$  l'événement : « le circuit est en état de marche après 6000 heures ».

On admet que les événements  $F_1, F_2, F_3$  sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité égale à 0,3.

1. L'arbre probabiliste ci-contre représente une partie de la situation. Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.



2. Démontrer que  $P(E) = 0,363$ .
3. Sachant que le circuit est en état de marche après 6000 heures, calculer la probabilité que la vanne  $V_1$  soit en état de marche à ce moment-là. Arrondir au millième.

### Partie C

L'industriel affirme que seulement 2 % des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note  $F$  la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon aléatoire de 400 vannes prises dans la production totale.

1. Déterminer l'intervalle  $I$  de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable  $F$ .
2. On choisit 400 vannes au hasard dans la production. On assimile ce choix à un tirage aléatoire de 400 vannes, avec remise, dans la production.  
Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses.  
Au vu de ce résultat, peut-on remettre en cause, au seuil de 95 %, l'affirmation de l'industriel ?

### Partie D

Dans cette partie, les probabilités calculées seront arrondies au millième.

L'industriel commercialise ses vannes auprès de nombreux clients. La demande mensuelle est une variable aléatoire  $D$  qui suit la loi normale d'espérance  $m = 800$  et d'écart-type  $\sigma = 40$ .

1. Déterminer  $P(760 \leq D \leq 840)$ .
2. Déterminer  $P(D \leq 880)$ .
3. L'industriel pense que s'il constitue un stock mensuel de 880 vannes, il n'aura pas plus de 1 % de chance d'être en rupture de stock. A-t-il raison ?

### Exercice 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé on considère :

- les points  $A(12, 0, 0)$ ,  $B(0, -15, 0)$ ,  $C(0, 0, 20)$ ,  $D(2, 7, -6)$ ,  $E(7, 3, -3)$  ;
- le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne :  $2x + y - 2z - 5 = 0$ .

#### Affirmation 1

Une équation cartésienne du plan parallèle à  $\mathcal{P}$  et passant par le point A est :  $2x + y + 2z - 24 = 0$ .

#### Affirmation 2

Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : 
$$\begin{cases} x = 9 - 3t \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

#### Affirmation 3

La droite (DE) et le plan  $\mathcal{P}$  ont au moins un point commun.

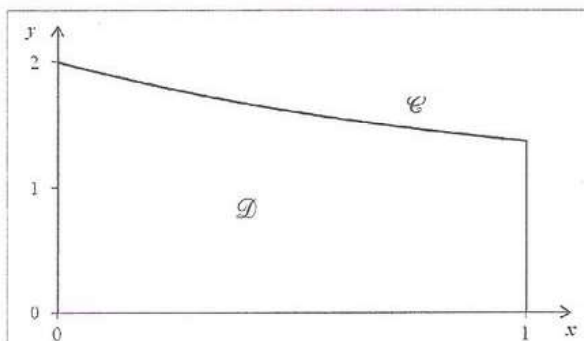
#### Affirmation 4

La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

**Exercice 3 (5 points)**  
Commun à tous les candidats

On considère la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$  par :  $g(x) = 1 + e^{-x}$ .  
On admet que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$ ,  $g(x) \geq 0$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $g$  dans un repère orthogonal, et  $\mathcal{D}$  le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe  $\mathcal{C}$ , d'autre part entre les droites d'équation  $x=0$  et  $x=1$ .



La courbe  $\mathcal{C}$  et le domaine  $\mathcal{D}$  sont représentés ci-contre.

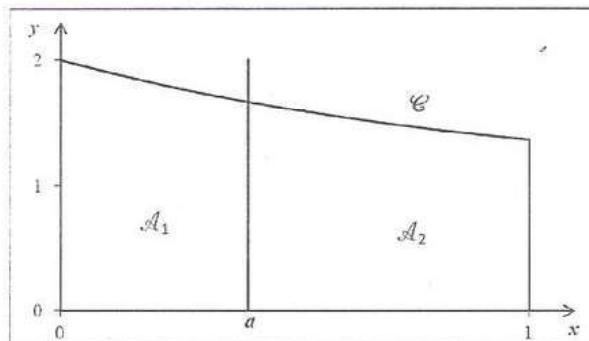
Le but de cet exercice est de partager le domaine  $\mathcal{D}$  en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

**Partie A**

Soit  $a$  un réel tel que  $0 \leq a \leq 1$ .

On note  $\mathcal{A}_1$  l'aire du domaine compris entre la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe  $(Ox)$ , les droites d'équation  $x=0$  et  $x=a$ , puis  $\mathcal{A}_2$  celle du domaine compris entre la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe  $(Ox)$  et les droites d'équation  $x=a$  et  $x=1$ .

$\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sont exprimées en unité d'aire.



1. a) Démontrer que  $\mathcal{A}_1 = a - e^{-a} + 1$ .  
b) Exprimer  $\mathcal{A}_2$  en fonction de  $a$ .
2. Soit  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$  par :  $f(x) = 2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e}$ .  
a) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ . On précisera les valeurs exactes de  $f(0)$  et  $f(1)$ .  
b) Démontrer que la fonction  $f$  s'annule une fois et une seule sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  en un réel  $\alpha$ . Donner la valeur de  $\alpha$  arrondie au centième.
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel  $a$  pour lequel les aires  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sont égales.

**Partie B**

Soit  $b$  un réel positif.

Dans cette partie, on se propose de partager le domaine  $\mathcal{D}$  en deux domaines de même aire par la droite d'équation  $y=b$ . On admet qu'il existe un unique réel  $b$  positif solution.

1. Justifier l'inégalité  $b < 1 + \frac{1}{e}$ . On pourra utiliser un argument graphique.
2. Déterminer la valeur exacte du réel  $b$ .



### Exercice 4 (5 points)

Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

Une espèce d'oiseaux ne vit que sur deux îles A et B d'un archipel.

Au début de l'année 2013, 20 millions d'oiseaux de cette espèce sont présents sur l'île A et 10 millions sur l'île B.

Des observations sur plusieurs années ont permis aux ornithologues d'estimer que, compte tenu des naissances, décès, et migrations entre les deux îles, on retrouve au début de chaque année les proportions suivantes :

- sur l'île A : 80 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 30 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente ;
- sur l'île B : 20 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 70 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $a_n$  (respectivement  $b_n$ ) le nombre d'oiseaux (en millions) présents sur l'île A (respectivement B) au début de l'année  $(2013 + n)$ .

#### Partie A – Algorithmique et conjectures

On donne ci-contre un algorithme qui doit afficher le nombre d'oiseaux vivant sur chacune des deux îles, pour chaque année comprise entre 2013 et une année choisie par l'utilisateur.

##### Début de l'algorithme

```
Lire  $n$ 
Affecter à  $a$  la valeur 20
Affecter à  $b$  la valeur 10
Affecter à  $i$  la valeur 2013
Afficher  $i$ 
Afficher  $a$ 
Afficher  $b$ 
Tant que  $i < n$  faire
    Affecter à  $c$  la valeur  $(0,8a + 0,3b)$ 
    Affecter à  $b$  la valeur  $(0,2a + 0,7b)$ 
    Affecter à  $a$  la valeur  $c$ 
Fin du Tant que
Fin de l'algorithme
```

1. Cet algorithme comporte des oublis dans le traitement. Repérer ces oublis et les corriger.
2. On donne ci-dessous une copie d'écran des résultats obtenus après avoir corrigé l'algorithme précédent dans un logiciel d'algorithmique, l'utilisateur ayant choisi l'année 2020.

```
***Algorithme lancé***
En l'année 2013, a prend la valeur 20 et b prend la valeur 10
En l'année 2014, a prend la valeur 19 et b prend la valeur 11
En l'année 2015, a prend la valeur 18.5 et b prend la valeur 11.5
En l'année 2016, a prend la valeur 18.25 et b prend la valeur 11.75
En l'année 2017, a prend la valeur 18.125 et b prend la valeur 11.875
En l'année 2018, a prend la valeur 18.0625 et b prend la valeur 11.9375
En l'année 2019, a prend la valeur 18.03125 et b prend la valeur 11.96875
En l'année 2020, a prend la valeur 18.015625 et b prend la valeur 11.984375
***Algorithme terminé***
```

Au vu de ces résultats, émettre des conjectures concernant le sens de variation et la convergence des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

### Partie B – Étude mathématique

On note  $U_n$  la matrice colonne  $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = MU_n$ , où  $M$  est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera.

On admet alors que  $U_n = M^n U_0$  pour tout entier naturel  $n \geq 1$ .

2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, justifier que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0,6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix}.$$

On ne détaillera le calcul que pour le premier des coefficients de la matrice  $M^n$ .

3. Exprimer  $a_n$  en fonction de  $n$ , pour tout entier naturel  $n \geq 1$ .
4. Avec ce modèle, peut-on dire qu'au bout d'un grand nombre d'années le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser ? Si oui, préciser vers quelle valeur.