BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Série scientifique

SESSION 2013

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée 4 heures – coefficient 9

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES QUATRE EXERCICES

* * * *

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation des calculatrices électroniques, programmables, alphanumériques ou à écran graphique **est autorisée**, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit fait usage d'aucune imprimante.
Chaque candidat ne peut utiliser qu'une seule machine sur sa table. En cas de défaillance, elle pourra cependant être remplacée.
Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que l'échange d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits. (circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999)

Ce sujet comporte **5 pages**.

Le candidat numérotera les feuillets rendus.

Exercice 1 : (5 points) ***Commun à tous les candidats***

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points $A(0,4,1)$, $B(1,3,0)$, $C(2,-1,-2)$ et $D(7,-1,4)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-1,3)$.
   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.
   a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
   b. Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=-4t-2 \\ y=t \\ z=3t+2 \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

   c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 2 : (5 points) ***Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques***

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables	:	a est un entier naturel
		b est un entier naturel
		c est un entier naturel
Initialisation :		Affecter à c la valeur 0
		Demander la valeur de a
		Demander la valeur de b
Traitement :		Tant que $a > b$
		Affecter à c la valeur $c + 1$
		Affecter à a la valeur $a - b$
		Fin de tant que
Sortie :		Afficher c
		Afficher a

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
2. Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note p.

Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.
2. Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1. Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \;\; [26]$.
2. Démontrer alors l'équivalence : $9m + 5 \equiv p \;\; [26] \Leftrightarrow m \equiv 3p - 15 \;\; [26]$.
3. Décoder alors la lettre B.

Exercice 3 : (5 points) ***Commun à tous les candidats***

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.
La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche.

Partie A
On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leq x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $P(390 \leq X \leq 410)$.
2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.
Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.
On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leq -1{,}751) \approx 0{,}040$.

Partie B
Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.
Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C
Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

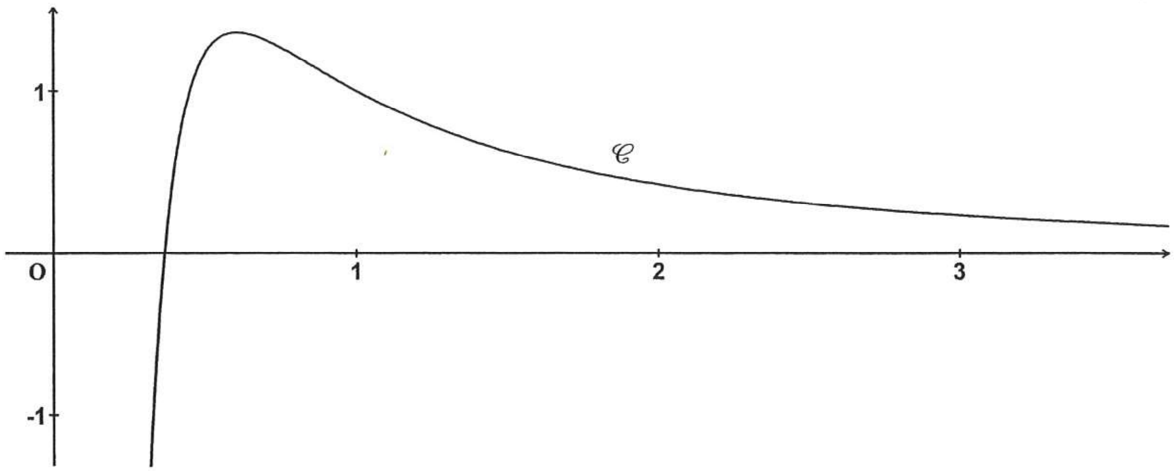
1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0{,}003$.

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?
3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

Exercice 4 : (5 points) ***Commun à tous les candidats***

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$ et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. *a.* Étudier la limite de f en 0.
   b. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. *a.* On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$.
   b. Résoudre sur l'intervalle $]0,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x)>0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. *a.* Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

4. Pour tout entier $n\geq 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x=n$.

   a. Démontrer que $0\leq I_2\leq \mathrm{e}-\dfrac{1}{2}$.

   On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{-2-\ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

   b. Calculer I_n en fonction de n.
   c. Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.