

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Spécifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}.$$

1. Étude d'une fonction auxiliaire

a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 e^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g .

- b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $]0 ; +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0,703 ; 0,704[$.
- c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

2. Étude de la fonction f

- a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
- b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Démontrer que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$.
- e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

EXERCICE 2 (5 points)**(commun à tous les candidats)**Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier U, V, W sont des réels
Début :	Affecter 0 à K Affecter 2 à U Affecter 10 à V Saisir N Tant que $K < N$ Affecter $K + 1$ à K Affecter U à W Affecter $\frac{2U + V}{3}$ à U Affecter $\frac{W + 3V}{4}$ à V Fin tant que Afficher U Afficher V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

Partie B1) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.b) Pour tout entier naturel n , on pose $w_n = v_n - u_n$.Montrer que pour tout entier naturel n , $w_n = 8 \left(\frac{5}{12} \right)^n$.2) a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.b) Dédire des résultats des questions 1) b) et 2) a) que pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq 10$ et $v_n \geq 2$.c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

- 3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.
- 4) Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.
En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

EXERCICE 3 (5 points)

(commun à tous les candidats)

Tous les résultats numériques devront être donnés sous forme décimale et arrondis au dix-millième.

Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres.

Une bille est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm.

Partie A

- 1) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque bille choisie au hasard dans la production associe son diamètre exprimé en mm.
On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,4.
Montrer qu'une valeur approchée à $0,0001$ près de la probabilité qu'une bille soit hors norme est $0,0124$.
On pourra utiliser la table de valeurs donnée en annexe.
- 2) On met en place un contrôle de production tel que 98 % des billes hors norme sont écartés et 99 % des billes correctes sont conservées.
On choisit une bille au hasard dans la production. On note N l'évènement : « la bille choisie est aux normes », A l'évènement : « la bille choisie est acceptée à l'issue du contrôle ».
 - a) Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.
 - b) Calculer la probabilité de l'évènement A .
 - c) Quelle est la probabilité pour qu'une bille acceptée soit hors norme ?

Partie B

Ce contrôle de production se révélant trop coûteux pour l'entreprise, il est abandonné : dorénavant, toutes les billes produites sont donc conservées, et elles sont conditionnées par sacs de 100 billes.

On considère que la probabilité qu'une bille soit hors norme est de $0,0124$.

On admettra que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.

On appelle Y la variable aléatoire qui à tout sac de 100 billes associe le nombre de billes hors norme de ce sac.

- 1) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?
- 2) Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y ?
- 3) Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme ?
- 4) Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme ?

EXERCICE 4 (5 points)

(candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) Proposition : Pour tout entier naturel n : $(1 + i)^{4n} = (-4)^n$.

2) Soit (E) l'équation $(z - 4)(z^2 - 4z + 8) = 0$ où z désigne un nombre complexe.

Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans \mathbb{C} , de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3) Proposition : Pour tout nombre réel α , $1 + e^{2i\alpha} = 2e^{i\alpha} \cos(\alpha)$.

4) Soit A le point d'affixe $z_A = \frac{1}{2}(1 + i)$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Proposition : si $n - 1$ est divisible par 4, alors les points O , A et M_n sont alignés.

5) Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

Proposition : $1 + j + j^2 = 0$.

FEUILLE ANNEXE

Annexe, Exercice 3

	A	B
1	d	$P(X < d)$
2	0	3,06E-138
3	1	2,08E-112
4	2	2,75E-89
5	3	7,16E-69
6	4	3,67E-51
7	5	3,73E-36
8	6	7,62E-24
9	7	3,19E-14
10	8	2,87E-07
11	9	0,00620967
12	10	0,5
13	11	0,99379034
14	12	0,99999971
15	13	1
16	14	1
17	15	1
18	16	1
19	17	1
20	18	1
21	19	1
22	20	1
23	21	1
24	22	1
25		

Copie d'écran d'une feuille de calcul