Les trinômes du second degré
Définition , allure de la courbe

Définition (avec la forme développée)

Un trinôme du second degré s'écrira sous la forme (*développée*) suivante : $a\,x^2 + b\,x + c$ (*avec* $a \neq 0$).
Les coefficients a , b et c sont des nombres réels.
Le coefficient a ne peut pas être égal à 0 (car il n'y aurait plus de second degré).
Par contre, b et c peuvent, quant à eux, être nuls.

Exemples *→ et on prendra l'habitude de bien faire apparaitre, sur sa feuille, les valeurs de a , b et c !*

Des trinômes classiques

$3x^2 + 4x + 5$ est un trinôme avec $a = 3$; $b = 4$; $c = 5$

$-2x^2 - 7x + 6$ est un trinôme avec $a = -2$; $b = -7$; $c = 6$

$x^2 - x - 2$ est un trinôme avec $a = 1$; $b = -1$; $c = -2$

Des trinômes plus particuliers (avec *a* et/ou *b* = 0)

$7x^2 + 3$ est un trinôme avec $a = 7$; $b = 0$; $c = 3$

$9x^2 - 8x$ est un trinôme avec $a = 9$; $b = -8$; $c = 0$

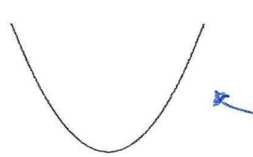
$4x^2$ est un trinôme avec $a = 4$; $b = 0$; $c = 0$

Allure de la courbe

La courbe représentative d'un trinôme du second degré sera toujours une *parabole*.
L'allure générale de cette parabole ***ne dépend que du signe*** du coefficient a du terme en x^2 .
Il n'y a donc que DEUX possibilités pour cette allure générale.
Et donc, pour tous les trinômes que vous allez étudier jusqu'au Bac, l'allure générale sera soit l'une soit l'autre. Cela doit vous aider et vous motiver dans votre apprentissage par coeur !

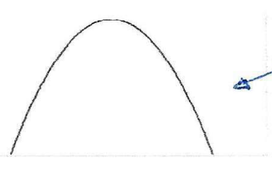
Règle

Si le coefficient a est ***POSITIF*** , alors la courbe est en "*smiley*" , c'est à dire " ∪ " .
aide mémoire : en maths, on aime bien les nombres positifs , donc il nous font sourire , donc "smiley" !



allure de la courbe
avec le coefficient a positif

Si le coefficient a est ***NEGATIF*** , alors la courbe est en " *pas smiley*" , c'est à dire "∩ "
aide mémoire : en maths, on n'aime pas les négatifs , donc on n'est pas content , donc "pas smiley" !



allure de la courbe
avec le coefficient a négatif

Comment bien reconnaitre un trinôme du second degré

Dans quelques exercices rencontrés cette année , l'éventuel trinôme du second degré ne sera pas forcément apparent sous sa forme développée $a x^2 + b x + c$ *(avec $a \neq 0$).*
Dans ce cas, il faudra effectuer un calcul algébrique préalable (développer , réduire ....) afin de pouvoir , oui ou non , identifier un trinôme avec ses coefficients a , b et c .
Avoir des x^2 dans l'expression ne suffit pas pour conclure, car ils peuvent tout à fait disparaitre, après réduction, ou ne pas définir de trinôme si ils sont associés à x^3 ou $\sqrt{x}$ ou $\frac{1}{x}$.

Un exemple d'énoncé
Parmi les expressions suivantes , dire celles qui correspondent à un trinôme du second degré.
$f(x)=5(x+1)^2-3$
$g(x)=2x^2+3x+1-2(x^2-3)$
$h(x)=1+3x^2$
$i(x)=(x-1)^2-(1+x+x^2)$
$j(x)=5x^3-2x^2+1$
$k(x)=7x-5x^2$

→ on a $f(x) = 5(x+1)^2 - 3$
$= 5(x^2+2x+1)-3$
$= 5x^2+10x+5-3 = 5x^2+10x+2$
Donc on a bien un trinôme (avec $a=5$; $b=10$; $c=2$).

→ on a $g(x) = 2x^2+3x+1-2(x^2-3)$
$= 2x^2+3x+1-2x^2+6 = 3x+7$
Donc ce n'est pas un trinôme (il n'y a plus de x^2 !).

→ on a $h(x) = 1+3x^2 = 3x^2+1$
Donc on a bien un trinôme (avec $a=3$; $b=0$; $c=1$).

→ on a $i(x) = (x-1)^2-(1+x+x^2)$
$= x^2-2x+1-1-x-x^2 = -3x$
Donc ce n'est pas un trinôme (il n'y a plus de x^2 !).

→ on a $j(x) = 5x^3-2x^2+1$
Ce n'est pas un trinôme à cause du x^3.

→ on a $k(x) = 7x-5x^2 = -5x^2+7x$
Donc on a bien un trinôme (avec $a=-5$; $b=7$; $c=0$).

Comment obtenir les variations d'un trinôme

Introduction

Il est important ici de rappeler qu'il n'y a que deux cas possibles pour les variations d'un trinôme.
Donc, pour tous les trinômes que vous allez étudier, cela sera soit un cas soit l'autre !

Nous allons introduire dans cette fiche deux nombres très importants, notés α (*alpha*) et β (bêta).
Ces nombres vont correspondre aux *coordonnées* du sommet de la parabole , et nous serviront dans une future fiche à obtenir la *forme canonique* du trinôme.

Les variations d'un trinôme

Ces variations sont très simples à mémoriser. C'est le même résultat que celui de l'allure générale de la courbe. ***Donc, les variations ne dépendront que du signe du coefficient a du terme en*** x^2 **.**
Attention ensuite, à bien placer dans le tableau, les coordonnées du sommet (α ; β).
Pour le moment, on laisse les lettres , la fiche suivante nous permettra de calculer la valeur de α et de β .

Si le coefficient *a* est ***POSITIF*** , alors on rappelle que la courbe est en "*smiley*" c'est à dire "$\cup$ " .
On obtient les variations suivantes :

x		α	
Variations du trinôme	↘	β	↗

Le nombre β va donc ici correspondre à un **MINIMUM**.

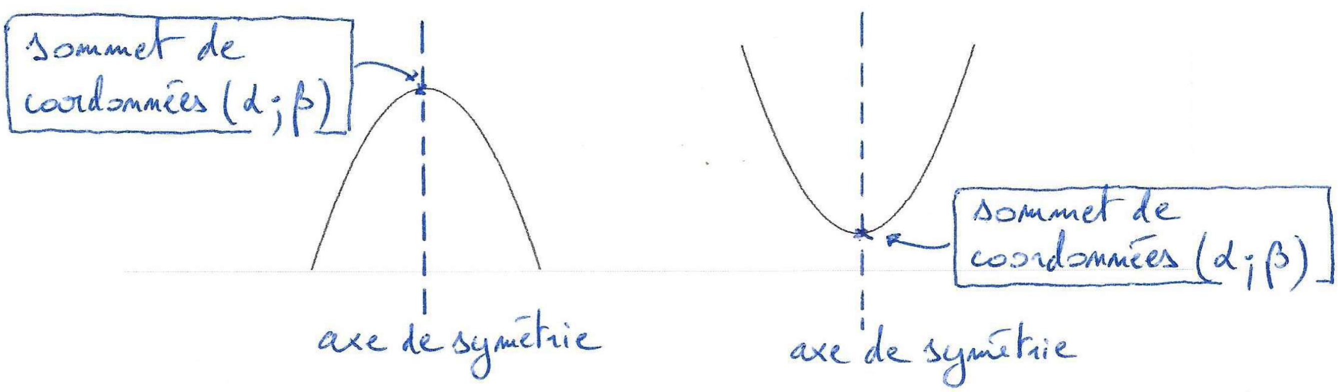
Si le coefficient *a* est ***NEGATIF*** , alors la courbe est en "*pas smiley*" c'est à dire "$\cap$ " .
On obtient les variations suivantes :

x		α	
Variations du trinôme	↗	β	↘

Le nombre β va donc ici correspondre à un **MAXIMUM**.

Symétrie et axe de symétrie

La parabole représentant un trinôme possède, dans tous les cas, un *axe de symétrie verticale*, passant par le sommet de cette parabole.
Cela signifie concrètement que les images obtenues à gauche du sommet se retrouvent, par symétrie, à droite de ce sommet.



Comment calculer les valeurs de α et de β

Introduction

Nous allons voir dans cette fiche le calcul des deux nombres fondamentaux, notés α (*alpha*) et β (*bêta*).
Je restreins volontairement cette fiche au fait de ne voir que *le calcul de ces nombres*. Pour leur utilisation (*sommet de parabole* ou *forme canonique*), cela sera développé sur les fiches suivantes.

Le calcul de α (*alpha*)

Ce calcul est très simple !

Pour un trinôme s'écrivant $a x^2 + b x + c$ *(avec $a \neq 0$)*, on aura $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$.

Le calcul de β (*bêta*)

Ce nombre β ne peut se calculer qu'une fois connue la valeur de α.

En effet , ce nombre β correspond à l'image de α par la fonction f, c'est à dire $\beta = f(\alpha)$.
En pratique, cela revient à remplacer la lettre x par la valeur de α, dans l'expression $f(x)$.

Un peu de pratique

Un bon conseil: prenez l'habitude de bien marquer sur votre feuille la valeur de a , de b et de c !

→ avec le trinôme $2x^2 + 12x + 5$ $\rightsquigarrow$ $(a = 2 ; b = 12 ; c = 5)$

On a : $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-12}{2\times 2} = -\dfrac{12}{4} = -3$

et $\beta = f(-3) = 2\times(-3)^2 + 12\times(-3) + 5 = -13$

→ avec le trinôme $3x^2 - 6x + 1$ $\rightsquigarrow$ $(a = 3 ; b = -6 ; c = 1)$

On a : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(-6)}{2\times 3} = \dfrac{6}{6} = 1$

et $\beta = f(1) = 3\times 1^2 - 6\times 1 + 1 = -2$

→ avec le trinôme $-x^2 + 3$ $\rightsquigarrow$ $(a = -1 ; b = 0 ; c = 3)$

On a : $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = -\dfrac{0}{2\times(-1)} = 0$

et $\beta = f(0) = -0^2 + 3 = 3$

→ avec le trinôme $x^2 - x$ $\rightsquigarrow$ $(a = 1 ; b = -1 ; c = 0)$

On a : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(-1)}{2\times 1} = \dfrac{1}{2}$

et $\beta = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$

Comment trouver le sommet d'une parabole

Introduction

La question consistant à trouver le sommet d'une parabole peut être considérée comme une question indirecte , où il va falloir, en fait, calculer tout simplement la valeur de α (*alpha*) et de β (*bêta*).
Ces calculs ont été vus dans une fiche précédente.

Le sommet d'une parabole

Quel que soit le trinôme, dans TOUS les cas, la valeur de α (*alpha*) correspond à *l'abscisse* du sommet et la valeur de β (*bêta*) correspond à *l'ordonnée* de ce sommet.
Donc , dans TOUS les cas , le sommet aura pour coordonnées (α ; β).

Pour rappel , on a $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ *. et* $\beta = f(\alpha)$ *,* β *est l'image de* α *par la fonction* f *.*

Minimum ou maximum

Cela dépend tout simplement de l'allure générale de la courbe.
Si la courbe est en "∪" , alors le sommet correspond forcément à un MINIMUM.
Si la courbe est en "∩", alors le sommet correspond cette fois à un MAXIMUM.

Un peu de pratique

Un bon conseil : prenez l'habitude de bien marquer sur votre feuille la valeur de a , de b et de c !

→ ***avec le trinôme*** $2x^2 - 8x - 1$ ⟶ ($a = 2$; $b = -8$; $c = -1$)

On a : $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-8)}{2\times 2} = \dfrac{8}{4} = 2$

et $\beta = f(2) = 2\times 2^2 - 8\times 2 - 1 = -9$

Le coefficient a est égal à 2 → POSITIF → courbe en "∪"

On obtient le tableau de variations suivant

x		2	
Variations du trinôme	↘	−9	↗

c'est un MINIMUM !

→ ***avec le trinôme*** $-3x^2 - 6x + 1$ ⟶ ($a = -3$; $b = -6$; $c = 1$)

On a : $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-6)}{2\times(-3)} = \dfrac{6}{-6} = -1$

et $\beta = f(-1) = 3\times(-1)^2 - 6\times(-1) + 1 = 4$

Le coefficient a est égal à −3 → NEGATIF → courbe en "∩"

On obtient le tableau de variations suivant

x		−1	
Variations du trinôme	↗	4	↘

c'est un MAXIMUM !

Comment obtenir la forme canonique d'un trinôme

Introduction

La question consistant à trouver la *forme canonique* d'un trinôme peut être, à nouveau, considérée comme une question indirecte , où il va falloir, en fait, calculer la valeur de α (*alpha*) et de β (*bêta*).

Pour rappel , on a $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ *. et* $\beta = f(\alpha)$ *,* β *est l'image de* α *par la fonction* f *.*

Définition de la forme canonique d'un trinôme

Pour un trinôme s'écrivant $a x^2 + b x + c$ *(avec* $a \neq 0$ *)* la forme *canonique* s'écrira sous la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$

Un peu de pratique

Un bon conseil : prenez l'habitude de bien marquer sur votre feuille la valeur de a , de b et de c !

→ ***avec le trinôme*** $2x^2 - 20x - 5$ $\leadsto$ ($a = 2$; $b = -20$; $c = -5$)

On a : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(-20)}{2\times 2} = \dfrac{20}{4} = 5$

et $\beta = f(5) = 2\times 5^2 - 20\times 5 - 5 = -55$

La forme canonique est : $2(x-5)^2 + (-55) = 2(x-5)^2 - 55$.

→ ***avec le trinôme*** $-3x^2 + 12x + 7$ $\leadsto$ ($a = -3$; $b = 12$; $c = 7$)

On a : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-12}{2\times(-3)} = \dfrac{-12}{-6} = 2$

et $\beta = f(2) = -3\times 2^2 + 12\times 2 + 7 = 19$

La forme canonique est : $-3(x-2)^2 + 19$.

→ ***avec le trinôme*** $x^2 + 6x + 1$ $\leadsto$ ($a = 1$; $b = 6$; $c = 1$)

On a : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-6}{2\times 1} = \dfrac{-6}{2} = -3$

et $\beta = f(-3) = (-3)^2 + 6\times(-3) + 1 = -8$

La forme canonique est : $1(x-(-3))^2 + (-8) = (x+3)^2 - 8$.

→ ***avec le trinôme*** $-x^2 + 8x$ $\leadsto$ ($a = -1$; $b = 8$; $c = 0$)

On a : $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-8}{2\times(-1)} = \dfrac{-8}{-2} = 4$

et $\beta = f(4) = -4^2 + 8\times 4 = 16$

La forme canonique est : $-1(x-4)^2 + 16 = -(x-4)^2 + 16$.

Avec la forme canonique
Comment retrouver le sommet ou l'expression développée

Comment retrouver le sommet si on connait la forme canonique

Si on connait le sommet d'une parabole avec ses coordonnées (α ; β) alors on sait déjà que l'on peut obtenir la forme canonique du trinôme associé.

En effet, on rappelle que la forme canonique s'écrit alors $a(x-\alpha)^2 + \beta$

Mais, parfois, dans certains exercices, on se retrouve à connaitre la forme canonique et il faut alors savoir y retrouver les coordonnées du sommet .C'est plutôt simple , mais quand même un peu piégeux, car *il faudra tenir compte du signe moins (-) devant le nombre* α.

Exemples

→ ***avec la forme canonique suivante :*** $3(x-4)^2+5$

On reconnait sans souci : $a = 3$; $\alpha = 4$; $\beta = 5$

Donc le sommet a pour coordonnées $(4 ; 5)$.

→ ***avec la forme canonique suivante :*** $-2(x+6)^2-1$

⚠

On doit écrire $-2(x+6)^2-1 = -2(x-(-6))^2-1$

On a donc ici : $a = -2$; $\alpha = -6$; $\beta = -1$

Donc le sommet a pour coordonnées $(-6 ; -1)$.

Comment vérifier que la forme développée et la forme canonique correspondent

Une fois la forme canonique obtenue , il peut être intéressant de se souvenir qu'elle correspond à la forme développée ax^2+bx+c initialement donnée.
Pour le vérifier, il suffit de développer la forme canonique obtenue (avec une identité remarquable par exemple) et de constater que le résultat correspond bien à la forme développée.

Exemples

→ ***avec la forme développée*** $2x^2+12x+14$ ***, on obtient la forme canonique*** $2(x+3)^2-4$.

On développe $2(x+3)^2-4$

$= 2(x^2+6x+9)-4$

$= 2x^2+12x+18-4 = 2x^2+12x+14$

→ c'est bon !

→ ***avec la forme développée*** $-3x^2+30x-74$ ***, on obtient la forme canonique*** $-3(x-5)^2+1$.

On développe $-3(x-5)^2+1$

$= -3(x^2-10x+25)+1$

$= -3x^2+30x-75+1 = -3x^2+30x-74$

→ c'est bon !

Comment associer le bon trinôme à sa parabole

C'est un exercice type sur les trinômes ! Son principe est le suivant :

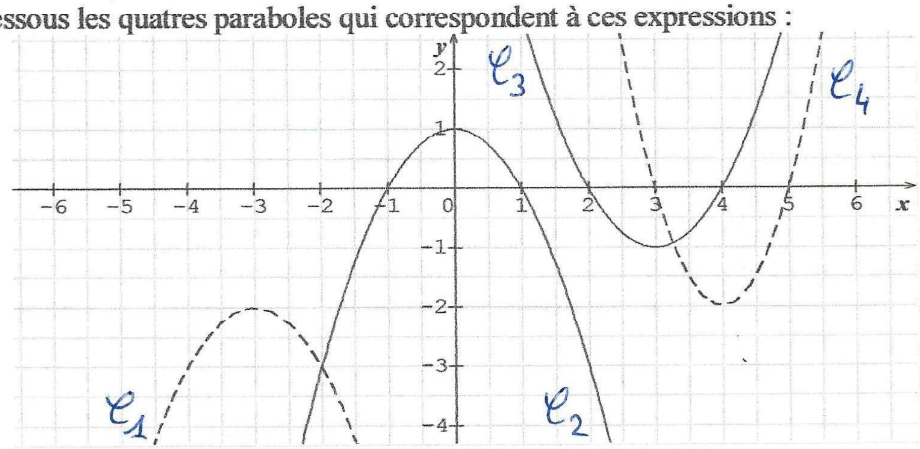
- on nous donne quatre expressions algébriques qui correspondent à des trinômes (*il peut être nécessaire de transformer les expressions pour bien obtenir un trinôme*).
- on nous donne un graphique avec quatre paraboles.
- il faut alors associer chacune des expressions algébriques à la bonne parabole !

Voici l'énoncé de cet exercice type

On donne les quatre expressions algébriques :

$f(x)=x^2-6x+8$; $g(x)=2(x-2)(x-6)+6$; $h(x)=1-x^2$; $i(x)=-(x+3)^2-2$

On donne ci-dessous les quatres paraboles qui correspondent à ces expressions :



Retrouvez l'expression algébrique de chacune de ces paraboles.

→ on commence en faisant bien apparaitre les trinômes.

$f(x) = x^2 - 6x + 8$

$g(x) = 2(x-2)(x-6) + 6 = 2(x^2 - 8x + 12) + 6 = 2x^2 - 16x + 30$

$h(x) = 1 - x^2 = -x^2 + 1$

$i(x) = -(x+3)^2 - 2 = -(x^2 + 6x + 9) - 2 = -x^2 - 6x - 11$

→ Le coefficient a est positif pour f et g. Cela correspond à une courbe "U" → soit $\mathcal{C}_3$, soit $\mathcal{C}_4$.
En calculant les sommets $(\alpha ; \beta)$, on obtiendrait que le sommet de f a pour coordonnées $(3 ; -1)$.
Donc f correspond à $\mathcal{C}_3$, et g correspond alors à $\mathcal{C}_4$.

→ Le coefficient a est négatif pour h et i. Cela correspond à une courbe "∩" → soit $\mathcal{C}_1$, soit $\mathcal{C}_2$.
En calculant les sommets $(\alpha ; \beta)$, on obtiendrait que le sommet de h a pour coordonnées $(0 ; 1)$.
Donc h correspond à $\mathcal{C}_2$, et i correspond alors à $\mathcal{C}_1$.