

Un rappel sur l'équation réduite d'une droite

Définition

On appellera *équation réduite* d'une droite (d) toute écriture du type $y = ax + b$.

Cette *équation de droite* ressemble beaucoup à l'écriture d'une *fonction affine*, et c'est normal !

Il y a équivalence entre la *fonction affine* définie par $f(x) = ax + b$ et son équation de droite $y = ax + b$.

Éléments caractéristiques d'une équation réduite

Dans l'équation réduite d'une droite s'écrivant $y = ax + b$,

→ le nombre a représente le *coefficient directeur* de la droite, c'est à dire qu'un *vecteur directeur* de cette droite s'écrira $\vec{v}(1; a)$, avec le nombre 1 en abscisse et le coefficient a en ordonnée.

→ le nombre b représente l'*ordonnée à l'origine*. C'est "l'endroit" où la droite coupe l'axe des ordonnées.

Avec la droite (d) définie par l'équation réduite $y = 3x + 2$

→ le coefficient directeur est égal à 3
l'ordonnée à l'origine est égale à 2

Donc la droite a un vecteur directeur $\vec{v}_2(1; 3)$
et elle passe par le point $A(0; 2)$

Avec la droite (d') définie par l'équation réduite $y = -x - 2$

→ le coefficient directeur est égal à -1
l'ordonnée à l'origine est égale à -2

Donc la droite a un vecteur directeur $\vec{v}_2(1; -1)$
et elle passe par le point $B(0; -2)$

Propriété avec le signe du coefficient a

Si le coefficient a est POSITIF, la fonction correspondante est CROISSANTE, et la droite "MONTE".

C'est le cas pour la droite (d) d'équation $y = 3x + 2$

Si le coefficient a est NEGATIF, la fonction est DECROISSANTE, et la droite "DESCEND".

C'est le cas pour la droite (d') d'équation $y = -x - 2$

Les droites particulières (droites horizontales ou droites verticales)

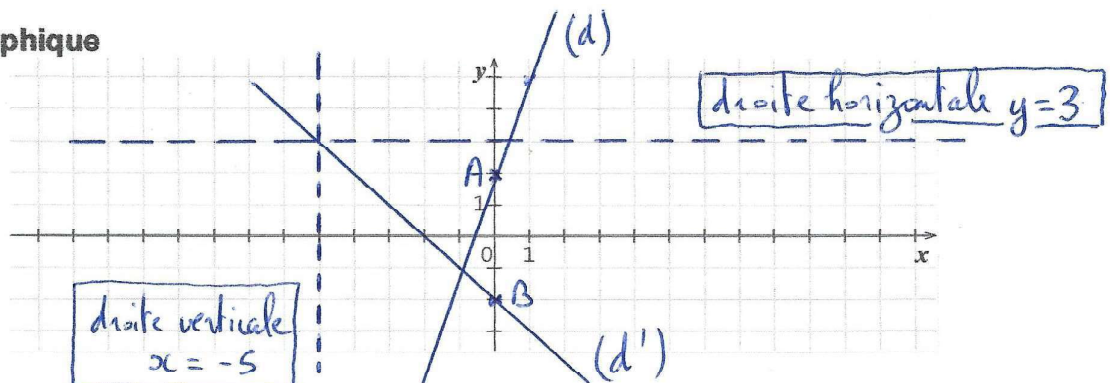
Lorsque $a = 0$, on se retrouve avec une équation du type $y = 3$.

L'écriture $y = 3$ correspond à une droite HORIZONTALE passant par l'ORDONNÉE 3.

Toute écriture du type $x = -5$ n'est pas une fonction affine.

Cette écriture $x = -5$ correspond à une droite VERTICALE passant par l'ABSCISSE -5.

Résumé graphique



Comment tracer une droite avec son équation réduite

Pour tracer une droite dont on connaît l'équation réduite, on a deux possibilités de raisonner :

- on "calcule" deux points de la droite et on peut alors la tracer.
- on "calcule" un seul point de la droite et on utilise le vecteur directeur (noté \vec{v}) de cette droite.

Méthode 1 : en calculant deux points de la droite

Avec la droite (d) d'équation réduite $y = 3x + 2$

→ on "calcule" un point A en remplaçant x par 0, puis un point B en remplaçant x par 1.

point A → $x = 0$ et $y = 3 \times 0 + 2 = 2$ soit A(0; 2)

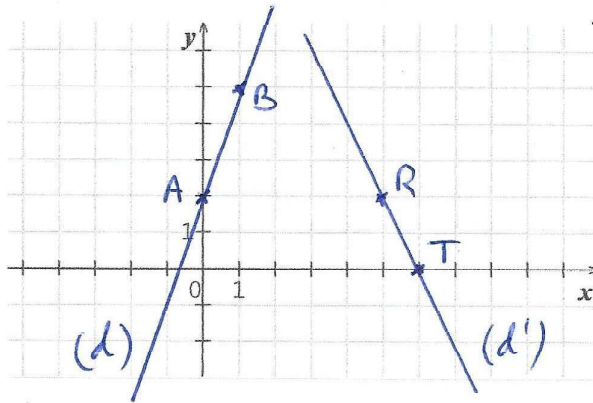
point B → $x = 1$ et $y = 3 \times 1 + 2 = 5$ soit B(1; 5)

Avec la droite (d') d'équation réduite $y = -2x + 12$

→ on "calcule" un point R en remplaçant x par 5, puis un point T en remplaçant x par 6.

point R → $x = 5$ et $y = -2 \times 5 + 12 = 2$ soit R(5; 2)

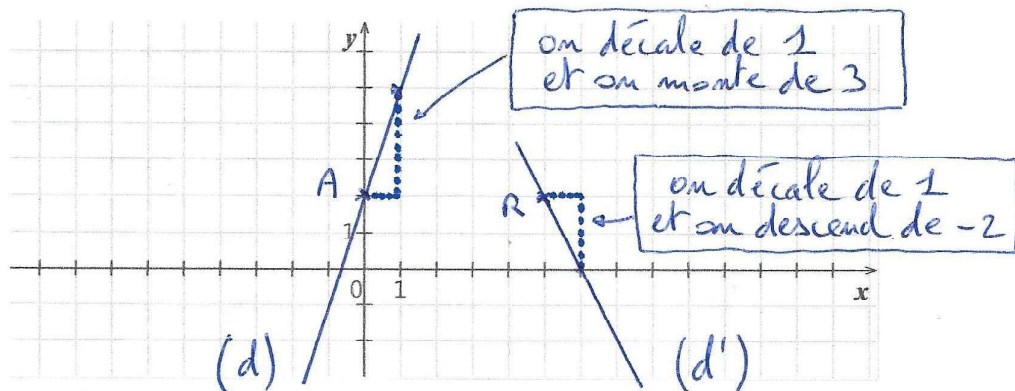
point T → $x = 6$ et $y = -2 \times 6 + 12 = 0$ soit T(6; 0)



Méthode 2 : avec un point (souvent l'ordonnée à l'origine) et un vecteur directeur

Avec la droite (d) d'équation réduite $y = 3x + 2$, on aura un vecteur directeur de coordonnées $(1; 3)$, et on passera par le point A(0; 2), en utilisant l'ordonnée à l'origine.

Avec la droite (d') d'équation réduite $y = -2x + 12$, on aura alors un vecteur directeur de coordonnées $(1; -2)$, et on passera par le point R(5; 2), déjà calculé plus haut sur cette fiche.



L' équation cartésienne d'une droite : définition , parallélisme

Définition

On appellera *équation cartésienne* d'une droite (d) toute écriture du type $ax + by + c = 0$ (avec $b \neq 0$).

Les écritures $3x - 6y - 7 = 0$ et $-2x + 4y + 1 = 0$ sont des équations cartésiennes de droites.

Élément caractéristique d'une équation cartésienne

Dans l'équation *cartésienne* d'une droite (d) s'écrivant $ax + by + c = 0$, on ne pourra pas trouver directement ni l'ordonnée à l'origine, ni le coefficient directeur de la droite.

Par contre, et c'est le RESULTAT ESSENTIEL à connaître par coeur :
on aura un *vecteur directeur* de cette droite (que l'on notera \vec{v}) qui s'écrira $\vec{v}(-b ; a)$.

Condition de parallélisme (avec la colinéarité des vecteurs directeurs)

Cette condition s'exprime avec la PROPRIÉTÉ suivante :

Deux droites sont PARALLELES si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont COLINEAIRES.

Je vous conseille, pour chaque droite dont on connaît l'équation cartésienne, de bien marquer sur votre feuille les valeurs respectives de a , de b et de c , et ensuite de bien indiquer le vecteur directeur avec ses coordonnées $(-b ; a)$.

Exemple

Les droites (d) d'équation $-3x + 6y + 1 = 0$ et (d') d'équation $2x - 4y - 5 = 0$ sont elles parallèles ?

$$\text{Avec } (d) \text{ d'équation } -3x + 6y + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 6 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{on a un vecteur directeur } \vec{v} \begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 \\ -3 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{v} \begin{vmatrix} -6 \\ -3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Avec } (d') \text{ d'équation } 2x - 4y - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -5 \end{cases}$$

$$\text{on a un vecteur directeur } \vec{v}' \begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(-4) \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{v}' \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix}$$

On vérifie alors la colinéarité des vecteurs $\vec{v} \begin{vmatrix} -6 \\ -3 \end{vmatrix}$ et $\vec{v}' \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix}$

$$\rightarrow \text{on calcule : } -6 \times 2 - (-3) \times 4 \\ = -12 + 12 = 0$$

Donc les vecteurs \vec{v} et \vec{v}' sont colinéaires.

Donc les droites (d) et (d') sont parallèles.

Comment tracer une droite avec son équation cartésienne

Pour tracer une droite dont on connaît l'équation cartésienne, on va vite se rendre compte que le calcul des points sera souvent fastidieux.

En effet, prenons l'équation cartésienne $4x - 3y + 1 = 0$.

Pour déterminer un point, il faut remplacer x par un nombre, et calculer la valeur de y correspondante.

Par exemple, on remplace x par 1 et on obtient $4 \times 1 - 3y + 1 = 0$, et en résolvant on obtient $y = \frac{5}{3}$.

Le point $(1; \frac{5}{3})$ n'est pas évident à placer dans un repère, et on vient donc de perdre du temps !!

On va donc privilégier une méthode qui consiste à calculer un seul point et à utiliser le vecteur directeur (noté \vec{v}) de la droite.

Mais, pour le calcul du point, le choix du x ne peut pas complètement être laissé au hasard. Il doit amener un résultat aisément plaçable sur le graphique pour l'ordonnée !

La méthode en utilisant un point et un vecteur directeur de cette droite

Avec la droite (d) d'équation cartésienne $4x - 3y + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$

\rightarrow un vecteur directeur sera $\vec{v} \mid \begin{matrix} -b = -(-3) = 3 \\ a = 4 \end{matrix}$ soit $\vec{v} \mid \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}$

\rightarrow pour trouver un point, on remplace x par 2 et on obtient: $4 \times 2 - 3y + 1 = 0 \rightarrow -3y = -9 \rightarrow y = \frac{-9}{-3} = 3$.

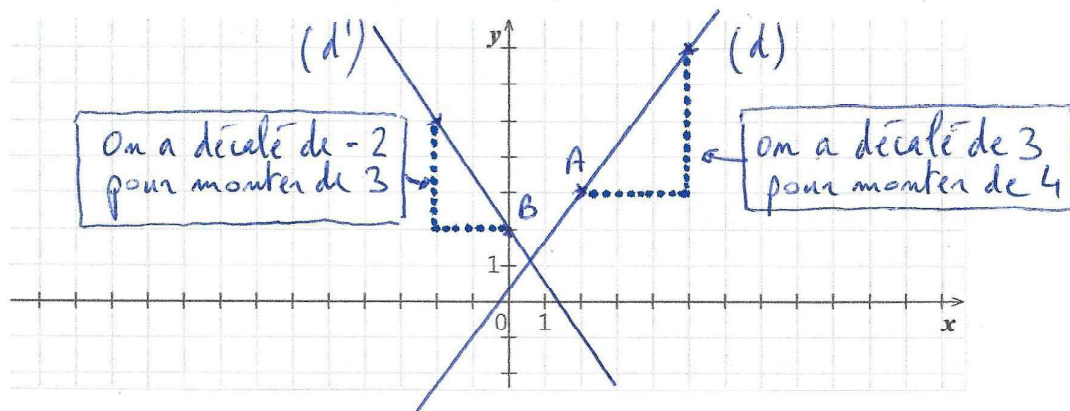
Donc la droite passe par le point $A(2; 3)$

Avec la droite (d') d'équation cartésienne $3x + 2y - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -4 \end{cases}$

\rightarrow un vecteur directeur sera $\vec{v}' \mid \begin{matrix} -b = -2 \\ a = 3 \end{matrix}$ soit $\vec{v}' \mid \begin{matrix} -2 \\ 3 \end{matrix}$

\rightarrow pour trouver un point, on remplace x par 0 et on obtient: $3 \times 0 + 2y - 4 = 0 \rightarrow 2y = 4 \rightarrow y = \frac{4}{2} = 2$.

Donc la droite passe par le point $B(0; 2)$



Comment passer équation réduite / équation cartésienne

Il faut maintenant comprendre qu'une droite peut être définie par son *équation réduite* **ou** par son *équation cartésienne*. Il est donc temps de voir qu'à tout moment on pourra, si nécessaire, passer d'un type d'équation à l'autre (sans que la droite soit modifiée bien sûr).

Comment passer de l'équation réduite à l'équation cartésienne

C'est le passage le plus facile à faire. Il suffit de tout "faire passer" à gauche.

Exemple : avec la droite (d) définie par l'équation réduite (E) : $y = 4x - 3$

$$\begin{array}{l} \text{On passe de} \\ \text{à} \end{array} \quad \begin{array}{l} y = 4x - 3 \quad (\text{équation réduite}) \\ -4x + y + 3 = 0 \quad (\text{équation cartésienne}) \end{array}$$

Comment passer de l'équation cartésienne à l'équation réduite

Il faudra ici isoler la lettre y . Du coup, suivant les coefficients présents dans l'équation cartésienne, on aura des fractions qui ne pourront pas disparaître !!

Exemple : avec la droite (d) définie par l'équation cartésienne (E) : $-5x + 3y + 6 = 0$

$$\begin{array}{l} \text{On passe de} \\ \text{à} \\ \text{soit} \\ \text{soit} \end{array} \quad \begin{array}{l} -5x + 3y + 6 = 0 \quad (\text{équation cartésienne}) \\ 3y = 5x - 6 \\ y = \frac{5}{3}x - \frac{6}{3} \\ y = \frac{5}{3}x - 2 \quad (\text{équation réduite}) \end{array}$$

Remarque

Il est intéressant de vérifier qu'on a beau changer d'écriture, on continue bien à parler de la même droite.

On peut ici vérifier que les vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires, et que les deux formes permettent de passer par un même point. Il ne peut alors s'agir que de la même droite !

On va faire cette vérification avec les deux formes d'équations : $y = 4x - 3$ et $-4x + y + 3 = 0$.

$$\text{avec } y = 4x - 3, \text{ on a } \vec{v} \mid \frac{1}{a} \text{ soit } \vec{v} \mid \frac{1}{4}$$

$$\text{avec } -4x + y + 3 = 0, \text{ on a } \vec{v}' \mid \frac{-b}{a} \text{ soit } \vec{v}' \mid \frac{-1}{-4}$$

Les vecteurs \vec{v} et \vec{v}' sont bien colinéaires ($\vec{v}' = -\vec{v}$)

De plus, le point $(2; 5)$ vérifie bien les deux équations.

$$\text{En effet, on a : } 4 \times 2 - 3 = 8 - 3 = 5$$

↑ on remplace x par 2 ↑ on obtient bien 5 !

$$\text{et } -4 \times 2 + 5 + 3 = -8 + 5 + 3 = 0$$

↑ on remplace x par 2 et y par 5 ↑ on obtient 0 !

Comment savoir si des droites sont parallèles ou sécantes

La règle générale

- . Deux droites d et d' **sont parallèles** si et seulement leur **vecteur directeur sont colinéaires** entre eux.
- . Deux droites d et d' **ne sont pas parallèles** si et seulement leur **vecteur directeur ne sont pas colinéaires** entre eux.

Exemple avec deux équations réduites

→ Le **vecteur directeur** de chacune de ces droites sera du type $(1; a)$, avec toujours 1 en abscisse. Et la règle devient : **deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur a** .

avec (d) : $y = 3x + 4$, on a $\vec{v} \mid \frac{1}{a}$ soit $\vec{v} \mid \frac{1}{3}$

avec (d') : $y = 2x + 4$, on a $\vec{v}' \mid \frac{1}{a}$ soit $\vec{v}' \mid \frac{1}{2}$

Les coefficients 2 et 3 sont différents

Donc les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles.

Exemple avec une équation réduite et une équation cartésienne

→ Pour l'équation réduite, le **vecteur directeur** sera du type $(1; a)$ et, pour l'équation cartésienne, le **vecteur directeur** sera du type $(-b; a)$.

avec (d) : $y = 5x + 4$, on a $\vec{v} \mid \frac{1}{a}$ soit $\vec{v} \mid \frac{1}{5}$

avec (d') : $10x - 2y + 1 = 0$, on a $\vec{v}' \mid \frac{-b}{a}$ soit $\vec{v}' \mid \frac{2}{10}$

Les vecteurs \vec{v} et \vec{v}' sont colinéaires ($\vec{v}' = 5\vec{v}$)

Donc les droites (d) et (d') sont parallèles.

Exemple avec deux équations cartésiennes

→ Le **vecteur directeur** de chacune de ces droites sera du type $(-b; a)$.

avec (d) : $-2x + 4y - 7 = 0$, on a $\vec{v} \mid \frac{-b}{a}$ soit $\vec{v} \mid \frac{-4}{-2}$

avec (d') : $3x - 6y + 2 = 0$, on a $\vec{v}' \mid \frac{-b}{a}$ soit $\vec{v}' \mid \frac{6}{3}$

Les vecteurs $\vec{v} \mid \frac{-4}{-2}$ et $\vec{v}' \mid \frac{6}{3}$ sont colinéaires

(on calcule, par exemple, $-4 \times 3 - (-2) \times 6 = -12 + 12 = 0$)

Donc les droites (d) et (d') sont parallèles.

Comment trouver le point d'intersection de deux droites

Lorsque deux droites sont *sécantes* (les vecteurs directeurs sont donc non colinéaires), on pourra s'intéresser à la recherche du *point d'intersection* entre ces deux droites.

Avec des équations réduites

Il suffit d'égaliser les deux expressions et on résout l'équation du premier degré pour trouver x .
On en déduit ensuite la valeur de l'ordonnée y .

Exemple : avec la droite (d) d'équation $y = 3x - 9$ et la droite (d') d'équation $y = -2x + 11$

$$\text{On résout l'équation } 3x - 9 = -2x + 11$$

$$\text{soit } 3x + 2x = 11 + 9$$

$$\text{soit } 5x = 20 \rightarrow x = \frac{20}{5} = 4$$

Pour trouver y , on remplace x par 4 dans une des équations $\rightarrow y = 3 \times 4 - 9 = 12 - 9 = 3$

Les coordonnées du point d'intersection sont $(4; 3)$.

Avec des équations cartésiennes

On sera amené à résoudre un système de deux équations à 2 inconnues.

Exemple : avec la droite (d) d'équation $4x - 5y - 3 = 0$ et la droite (d') d'équation $-3x + 2y + 4 = 0$

$$\text{On résout le système } \begin{cases} 4x - 5y - 3 = 0 \\ -3x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : } \begin{array}{l} (\times 3) \\ (\times 4) \end{array} \begin{cases} 4x - 5y - 3 = 0 \\ -3x + 2y + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{soit } \begin{array}{l} \\ \oplus \end{array} \begin{cases} 12x - 15y - 9 = 0 \\ -12x + 8y + 16 = 0 \\ \hline 0 - 7y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\text{On obtient : } y = \frac{-7}{-7} = 1$$

Pour trouver x , on remplace y par 1 dans une des équations $\rightarrow 4x - 5 \times 1 - 3 = 0$

$$\text{soit } 4x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{4} = 2$$

Les coordonnées du point d'intersection sont $(2; 1)$.

Comment trouver l'équation cartésienne d'une droite (1)

On a appris, en classe de Seconde, à retrouver l'équation réduite d'une droite. On va cette année apprendre à retrouver une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$.

On a, dans ce chapitre, trois fiches qui vont balayer l'ensemble des situations rencontrées en Première.

Méthode

Elle consiste à connaître un vecteur directeur de la droite. Et on écrit que ce vecteur correspond aux coordonnées vues en cours $(-b; a)$, ce qui nous permet de connaître la valeur de a et celle de b .

Ensuite, il faut utiliser un point de la droite. Et, en remplaçant la valeur de x et de y par les coordonnées de ce point, on trouve la valeur de c , puisqu'il faut que le résultat final soit égal à 0.

Comment bien retranscrire les énoncés

Si on connaît directement un vecteur directeur \vec{v} et un point A de la droite, alors on a tout ce qu'il faut pour se lancer et mettre en place la méthode précédente !!

Un exemple en cherchant l'équation cartésienne de la droite ayant le vecteur $(-3; 2)$ comme vecteur directeur et passant par le point $A(-5; 2)$.

Etape 1 :

Le vecteur directeur $\vec{v} \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \end{vmatrix}$ doit correspondre à $\begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix}$.

Donc on veut : $-b = -3$ et $a = 2$

soit $b = 3$ et $a = 2$

L'équation cartésienne s'écrit donc :

$$2x + 3y + c = 0$$

\uparrow \uparrow
 a b

Etape 2 :

On utilise le point A qui doit vérifier l'équation.

$$\text{On obtient : } 2 \times (-5) + 3 \times 2 + c = 0$$

\uparrow \uparrow
 x_A y_A

$$\text{soit } -10 + 6 + c = 0$$

$$\text{soit } -4 + c = 0 \rightarrow c = 4.$$

Bilan :

L'équation cartésienne de cette droite

$$\text{sera : } 2x + 3y + 4 = 0.$$

Comment trouver l'équation cartésienne d'une droite (2)

On a appris, en classe de Seconde, à retrouver l'équation réduite d'une droite. On va cette année apprendre à retrouver une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$.
On a, dans ce chapitre, trois fiches qui vont balayer l'ensemble des situations rencontrées en Première.

Méthode

Elle consiste à connaître un vecteur directeur de la droite. Et on écrit que ce vecteur correspond aux coordonnées vues en cours $(-b; a)$, ce qui nous permet de connaître la valeur de a et celle de b . Ensuite, il faut utiliser un point de la droite. Et, en remplaçant la valeur de x et de y par les coordonnées de ce point, on trouve la valeur de c , puisqu'il faut que le résultat final soit égal à 0.

Comment bien retranscrire les énoncés

Si on connaît deux points A et B de la droite, alors on détermine les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} qui sera bien un vecteur directeur de la droite (AB), puis on utilise ensuite les coordonnées du point A ou du point B pour finir le travail.

Un exemple en cherchant l'équation cartésienne de la droite passant par les points A (1; 2) et B (7; 6)

On commence en calculant $\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix}$.

Etape 1 :

\overrightarrow{AB} est un vecteur directeur et doit correspondre à $\begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix}$

Donc on veut : $-b = 6$ et $a = 4$

soit $b = -6$ et $a = 4$

L'équation cartésienne s'écrit donc :

$$4x - 6y + c = 0$$

$\begin{matrix} a \uparrow & & \uparrow b \end{matrix}$

Etape 2 :

On utilise, par exemple, le point A qui doit vérifier l'équation.

On obtient : $4 \times 1 - 6 \times 2 + c = 0$

$\begin{matrix} \uparrow x_A & & \uparrow y_A \end{matrix}$

soit $4 - 12 + c = 0 \rightarrow c = 8$

Bilan :

L'équation cartésienne de cette droite

sera : $4x - 6y + 8 = 0$

Comment trouver l'équation cartésienne d'une droite (3)

On a appris, en classe de Seconde, à retrouver l'équation réduite d'une droite. On va cette année apprendre à retrouver une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$.

On a, dans ce chapitre, trois fiches qui vont balayer l'ensemble des situations rencontrées en Première.

Méthode

Elle consiste à connaître un vecteur directeur de la droite. Et on écrit que ce vecteur correspond aux coordonnées vues en cours $(-b; a)$, ce qui nous permet de connaître la valeur de a et celle de b .

Ensuite, il faut utiliser un point de la droite. Et, en remplaçant la valeur de x et de y par les coordonnées de ce point, on trouve la valeur de c , puisqu'il faut que le résultat final soit égal à 0.

Comment bien retranscrire les énoncés

Si on connaît une droite parallèle à la droite cherchée et un point de cette droite cherchée, alors on détermine un vecteur directeur de la droite parallèle. On peut alors affirmer qu'il est automatiquement un vecteur directeur de la droite cherchée.

On finit le travail en utilisant les coordonnées du point donné dans l'énoncé.

Un exemple en cherchant l'équation cartésienne de la droite parallèle à la droite d'équation $-3x + 2y - 10 = 0$ et passant par le point $A(2; 1)$.

Un vecteur directeur de $-3x + 2y - 10 = 0$ sera $\vec{v} \begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix} \rightarrow \vec{v} \begin{vmatrix} -2 \\ -3 \end{vmatrix}$

Etape 1 :

Ce vecteur directeur $\vec{v} \begin{vmatrix} -2 \\ -3 \end{vmatrix}$ doit aussi correspondre au vecteur directeur $\begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix}$ de la nouvelle droite.

Donc on veut : $-b = -2$ et $a = -3$

soit $b = 2$ et $a = -3$

L'équation cartésienne s'écrira donc :

$$\underset{a \rightarrow}{-3x} + \underset{\uparrow b}{2y} + c = 0$$

Etape 2 :

On utilise le point A qui doit vérifier l'équation.

$$\text{On obtient : } -3 \times \underset{\uparrow x_A}{2} + 2 \times \underset{\uparrow y_A}{1} + c = 0$$

$$\text{soit } -6 + 2 + c = 0 \rightarrow c = 4$$

Bilan :

L'équation cartésienne de cette droite

$$\text{sera : } -3x + 2y + 4 = 0.$$