

**Corrigé
de l'épreuve de mathématiques
Bac S
Polynésie juin 2019**

**Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr**

Exercice 1

① a) On a $E(x) = \frac{1}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{1}{E(x)} = \frac{1}{10} = 0,1$

b) On cherche $P(x \geq 6) = e^{-\lambda \times 6} = e^{-0,6} \approx 0,55$

c) C'est la loi de mon vieillissement !

→ on a $P_{x \geq 6}(x \geq 12) = P(x \geq 6) \approx 0,55$

② on cherche t tel que $P(x > t) = 0,05$

→ $e^{-\lambda t} = 0,05$

→ $-\lambda t = \ln 0,05 \rightarrow t = \frac{\ln 0,05}{-\lambda} \approx 30 \text{ mois.}$

③ a) on cherche $P(55 \leq x \leq 65)$

→ on peut reconnaître l'intervalle 2σ ou utiliser la calculatrice avec Normal FRep → on obtient 0,954.

b) on veut $P(N \geq m) = 0,99$ soit $P(N \leq m) = 0,01$

et on obtient $m = 54$ avec Inv-Nor sur la calculatrice.

④ on reconnaît l'utilisation d'un intervalle de

fluctuation asymptotique avec $p = \frac{2}{3}$ et $n = 120$.

→ on peut vérifier les conditions $n \geq 30$; $np \geq 5$; $n(1-p) \geq 5$

On obtient : $I_f = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$

soit $I_f \approx [0,58 ; 0,76]$

or la fréquence observée est : $f_{obs} = \frac{65}{120} \approx 0,54 \notin I_f$.

D'où l'hypothèse peut être mise en doute.

Exercice 2

Partie A

① on avait alors $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (ax^2 + bx + c) = c \ (\neq -\infty)$

Donc la condition sur la limite ne serait pas vérifiée.

② a) on veut : $g(1) = k \times h_m(1) = k \times 0 = 0 \quad \text{OK}$

$$g'(x) = k \times \frac{1}{x} \rightarrow g'(1) = \frac{k}{1} = 0,25 \rightarrow k = 0,25$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 0,25 \ln x = -\infty \quad \text{OK}$$

b) Prenons une valeur "au hasard".

$$\rightarrow \text{on obtient : } g(0,5) = 0,25 \times h_m(0,5) \approx -0,17$$

Mais graphiquement, on a $g(0,5) < -0,5 \ (\approx -0,75)$

Donc g et la courbe \mathcal{C} ne peuvent correspondre.

③ on calcule $h'(x) = ax \boxed{\frac{-4}{x^5}} + b = -\frac{4a}{x^4} + b$

$$\text{Donc on veut : } h(1) = 0 \rightarrow \frac{a}{1^4} + b \times 1 = 0 \\ \rightarrow a + b = 0$$

$$\text{et } h'(1) = 0,25 \rightarrow -\frac{4a}{1^5} + b = 0,25 \\ \rightarrow -4a + b = 0,25$$

on résout le système $\begin{cases} a + b = 0 \\ -4a + b = 0,25 \end{cases}$

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 0 \\ -4a + b & = & 0,25 \\ \hline a - (-4a) & = & 0 - 0,25 \\ 5a & = & -0,25 \\ a & = & -\frac{0,25}{5} = -\frac{1}{20} \end{array}$$

$$\text{et } b = -a = \frac{1}{20}.$$

Partie B :

① On reconnaît l'utilisation du TFI.

On a : $f'(x) = \frac{1}{20} \left(1 + \frac{4}{x^5}\right) > 0$

→ La fonction f est continue et croissante sur $[0; 1]$.

avec $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et $f(1) = 0$

Le nombre -5 appartient bien à l'intervalle image $]-\infty; 0]$.

Donc, d'après le corollaire du TFI, l'équation $f(x) = -5$ possède une unique solution sur $[0; 1]$.

→ avec la calculatrice, on obtient : $x \approx 0,32$.

② a) $u(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2} \rightarrow u'(x) = \frac{1}{2} \times -\frac{2}{x^3} = -\frac{1}{x^3}$

b) On cherche $V = \int_0^1 \pi x^2 \times \frac{1}{20} \left(1 + \frac{4}{x^5}\right) dx$
 $= \frac{\pi}{20} \int_0^1 \left(x^2 + \frac{4x^2}{x^5}\right) dx = \frac{\pi}{20} \int_0^1 \left(x^2 + \frac{4}{x^3}\right) dx$

or, d'après le a), $u(x)$ est une primitive de $x \rightarrow -\frac{1}{x^3}$

Donc $-4u(x)$ est une primitive de $-4x \left(-\frac{1}{x^3}\right)$

soit $-\frac{2}{x}$ est une primitive de $\frac{4}{x^3}$

On obtient : $V = \frac{\pi}{20} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{x^2} \right]_0^1$
 $= \frac{\pi}{20} \left(\frac{1}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{1^2} \right) \right)$

→ $V = \frac{\pi}{20} \left(-\frac{5}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{1^2} \right)$

$\approx 2,8 \text{ cm}^3$ (en prenant $x \approx 0,32$)

Exercice 3

① On a $I_0 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} dx$, avec $-\ln(1-x)$ primitive de $\frac{1}{1-x}$

$$\rightarrow I_0 = \left[-\ln(1-x) \right]_0^{1/2} = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) + \ln 1 = -\ln\frac{1}{2} = -(-\ln 2) = \ln 2$$

② a) $I_0 - I_1 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} dx - \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x} dx = \int_0^{1/2} \frac{1-x}{1-x} dx = \int_0^{1/2} 1 dx$

$$\rightarrow I_0 - I_1 = [x]_0^{1/2} = \frac{1}{2}$$

b) $I_0 - I_1 = \frac{1}{2} \rightarrow I_1 = I_0 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

③ a) $I_m - I_{m+1} = \int_0^{1/2} \frac{x^m}{1-x} dx - \int_0^{1/2} \frac{x^{m+1}}{1-x} dx$
 $= \int_0^{1/2} \frac{x^m - x^{m+1}}{1-x} dx = \int_0^{1/2} \frac{x^m(1-x)}{1-x} dx = \int_0^{1/2} x^m dx$

$$\rightarrow I_m - I_{m+1} = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} \right]_0^{1/2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{m+1}$$

④ on a donc : $I_{m+1} = I_m - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{m+1}$

Voir un algorithme possible :

p et I sont des réels

I prend la valeur ln 2

p prend la valeur 0

Demandez une valeur pour m

Pour p variant de 0 à m-1

Faire

I prend la valeur $I - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}}{p+1}$

Afficher I

④ a) On part de: $0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

$$\rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} 0 dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2^{n-1}}}{2^{n-1}} dx$$

nombre qui ne dépend pas de la variable x

$$\rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} [x]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} \rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$$

b) avec le théorème des gendarmes et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$,
on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

c) a) On peut utiliser une somme télescopique.

On sait que: $I_m - I_{m+1} = \frac{(\frac{1}{2})^{m+1}}{m+1}$

Donc: $I_0 - I_1 = \frac{(\frac{1}{2})^1}{1} = \frac{1}{2}$

$$I_1 - I_2 = \frac{(\frac{1}{2})^2}{2}$$

$$I_2 - I_3 = \frac{(\frac{1}{2})^3}{3}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$I_{m-1} - I_m = \frac{(\frac{1}{2})^m}{m}$$

$$I_0 - I_m = S_m$$

on additionne toutes ces égalités
→ vont s'annuler
les $I_1, I_2, I_3 \dots I_{m-1}$

b) on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_m = I_0 = \ln 2$

Exercice 4

① On vérifie que les coordonnées de E, B et D vérifient l'équation du plan.

Par exemple, pour le point E (0; 0; 6), cela donne :

$$3 \times 0 + 2 \times 0 + 6 \times 6 - 36 = 36 - 36 = 0 \quad \boxed{\text{OK}}$$

② a) Le point G a pour coordonnées (12; 18; 6)

Donc le vecteur \vec{AG} sera

$$\begin{cases} 12-0=12 \\ 18-0=18 \\ 6-0=6 \end{cases}$$

A est l'origine du repère

On obtient pour la droite (AG) : $\begin{cases} x = 0 + 12t = 12t \\ y = 0 + 18t = 18t \\ z = 0 + 6t = 6t \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 0 + 12t = 12t \\ y = 0 + 18t = 18t \\ z = 0 + 6t = 6t \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \text{vecteur } AG \\ \text{point A} \end{matrix}$$

③ c'est la recherche de l'intersection droite / plan.

$$\rightarrow \text{on résout : } 3 \times 12t + 2 \times 18t + 6 \times 6t - 36 = 0$$

$$\text{soit } 108t - 36 = 0 \rightarrow t = \frac{36}{108} = \frac{1}{3}$$

\rightarrow on remplace dans (AG) : $\begin{cases} x = 12 \times \frac{1}{3} = 4 \\ y = 18 \times \frac{1}{3} = 6 \\ z = 6 \times \frac{1}{3} = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 12 \times \frac{1}{3} = 4 \\ y = 18 \times \frac{1}{3} = 6 \\ z = 6 \times \frac{1}{3} = 2 \end{cases}$$

④ On a : $(AG) \perp (EBD)$

ssi un vecteur directeur de (AG)

est colinéaire au vecteur normal de (EBD)

or, il est évident que les vecteurs $\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

ne sont pas colinéaires

Dans (AG) n'est pas
orthogonale à (EBD)

$$\begin{array}{l} 12:3=4 \\ 18:2=9 \\ 6:6=1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Les résultats ne} \\ \text{sont pas égaux.} \end{array}$$

⑤ a) Les coordonnées du milieu M seront :

$$\begin{cases} \frac{x_E+x_D}{2}=0 \\ \frac{y_E+y_D}{2}=9 \\ \frac{z_E+z_D}{2}=3 \end{cases}$$

$$\text{On a : } \vec{BK} \begin{vmatrix} 4 - 12 = -8 \\ 6 - 0 = 6 \\ 2 - 0 = 2 \end{vmatrix} \text{ et } \vec{BN} \begin{vmatrix} 0 - 12 = -12 \\ 9 - 0 = 9 \\ 3 - 0 = 3 \end{vmatrix}$$

On vérifie alors que $-12 : -8 = 1,5$

$$9 : 6 = 1,5$$

$$3 : 2 = 1,5$$

Donc les vecteurs \vec{BK} et \vec{BN} sont colinéaires

Donc les points B, K et N sont alignés.

⑤ voir dessin

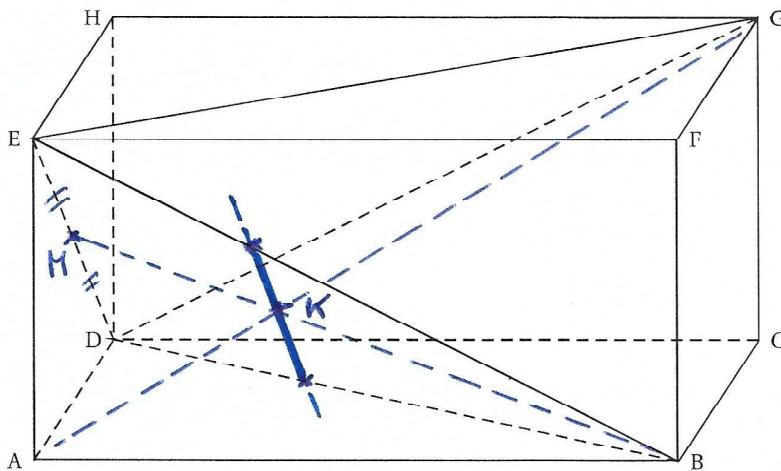
⑤ a) Les plans (AED) et (EBD) se coupent en la droite (ED) .

Or, le plan P est parallèle à (AED) et passe par K .

Ce point K appartient alors à (EBD) et à P .

Et donc, l'intersection de (EBD) et de P est une droite parallèle à (ED) passant par K .

b)



→ pour continuer le point K :

on trace la droite (AG)

on place le point M milieu de $[ED]$.

le point K est sur (AG) et aligné avec B et N .

→ il restera à tracer la parallèle à (ED) passant par K pour obtenir l'intersection demandée.

Exercice de spé

Partie A

- ① il semble que ce soit toujours 0; 1; 4; 5; 6; 9
- ② on a $\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on en déduit $\Pi^3 = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$
- on a $\begin{pmatrix} V_{n+3} \\ V_{n+3} \end{pmatrix} = \Pi^3 \begin{pmatrix} V_n \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_n \\ V_n \end{pmatrix}$

$$\text{soit } V_{n+3} = 26V_n + 45V_n$$

$$\text{et } V_{n+3} = 15V_n + 26V_n$$

$$\begin{aligned} ③ \text{ on a donc } V_{n+3} &= 15V_n + 26V_n + V_n \\ &= 5(3V_n + 5V_n) + V_n \\ \rightarrow V_{n+3} &= V_n + 5k \quad (\text{avec } k \text{ entier}) \\ \rightarrow V_{n+3} &\equiv V_n \quad [5] \end{aligned}$$

- ③ question difficile à démontrer (récurrence sur q)
mais après c'est plutôt facile.

Initialisation pour $q=0$, on a bien :

$$\sqrt{3 \times 0 + 2} = \sqrt{2} \equiv V_2 \quad [5]$$

Hérédité on suppose $\sqrt{3q+2} \equiv V_n \quad [5]$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } \sqrt{3(q+1)+2} &= \sqrt{3q+1+3} = \sqrt{3q+2} \quad (\text{d'après 2)b}) \\ &\equiv V_n \quad [5] \end{aligned}$$

- ④ $V_0 \equiv 0 \quad [5]$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

$$V_1 \equiv 1 \quad [5]$$

$$V_2 \equiv 4 \quad [5]$$

$$V_3 \equiv 15 \quad [5] \equiv 0 \quad [5]$$

et d'après $\sqrt{3q+2} \equiv V_n \quad [5]$, on aura bien tous les termes de la suite à partir des termes V_0, V_1 et V_2 .

5 On se replace alors "modulo 10" dans le système décimal

$$\sqrt{3} \equiv 0 [5] \rightarrow \sqrt{3} \equiv 0 [10] \text{ ou } \sqrt{3} \equiv 5 [10]$$

$$\sqrt{3} \equiv 1 [5] \rightarrow \sqrt{3} \equiv 1 [10] \text{ ou } \sqrt{3} \equiv 6 [10]$$

$$\sqrt{3} \equiv 4 [5] \rightarrow \sqrt{3} \equiv 4 [10] \text{ ou } \sqrt{3} \equiv 9 [10]$$

→ le chiffre des unités de $\sqrt{3}$ sera 0; 1; 4; 5; 6 ou 9.

Partie B

① on a : $1 < \sqrt{3} < 2 \rightarrow 1 < \frac{p}{q} < 2 \rightarrow q < p < 2q$ (en multipliant par q)

② on a $n = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ donc on obtient $n^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

③ a) on a $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} p' = 2p - 3q \\ q' = -p + 2q \end{cases}$

b) p et q étant des entiers relatifs, les nombres p' et q' qui s'écrivent à partir de p et q le sont aussi !

c) on a : $p' = 2p - 3q$ avec $p = q\sqrt{3} \rightarrow p' = 2q\sqrt{3} - 3q$
 $q' = -p + 2q \qquad \qquad \qquad q' = -q\sqrt{3} + 2q$

→ on part de $q'\sqrt{3} = (-q\sqrt{3} + 2q)\sqrt{3}$

$$= -q(\sqrt{3})^2 + 2q\sqrt{3} = -3q + 2q\sqrt{3} = p'$$

Donc on a bien $q'\sqrt{3} = p'$ ou $p' = q'\sqrt{3}$

d) on a $q' = -q\sqrt{3} + 2q = q(2 - \sqrt{3})$

or on a $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$

soit $0 < q(2 - \sqrt{3}) < q$

soit $0 < q' < q$

e) on avait supposé que l'on avait $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ avec q le plus petit possible

et on a trouvé $\sqrt{3} = \frac{p'}{q'}$ avec $0 < q' < q$

→ c'est une contradiction.

$\sqrt{3}$ ne peut donc pas être un rationnel.