Corrigé

de l'épreuve de mathématiques

Bac S

Asie juin 2019

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A

1) (T_n) représente une température qui va décroître.

2) On a : $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$

soit $T_{n+1} - T_n = -0,2T_n + 2$

soit $T_{n+1} = T_n - 0,2T_n + 2 = 0,8T_n + 2$

3) a) On a : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$

$U_n = T_n - 10$

$\hookrightarrow T_n = U_n + 10$

On part de $U_{n+1} = T_{n+1} - 10$

$= 0,8T_n + 2 - 10$

$= 0,8(U_n + 10) + 2 - 10$

$= 0,8U_n + \underbrace{0,8 \times 10 + 2 - 10}_{=0}$

$\rightarrow U_{n+1} = 0,8U_n$

(U_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $U_0 = T_0 - 10 = 80 - 10 = 70$

b) On a donc : $U_n = U_0 \times 0,8^{(n-0)} = 70 \times 0,8^n$

et $T_n = U_n + 10 = 70 \times 0,8^n + 10$

c) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$ car $-1 < q < 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 10$

4) a) On obtient $n = 4$

b) La température passe en dessous de 40°C à partir de 4 minutes.

Partie B

1) a) On applique la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(t) = \theta(t)$ $v(t) = e^{-0,2t}$

$u'(t) = \theta'(t)$ $v'(t) = -0,2e^{-0,2t}$

On obtient : $f'(t) = \dfrac{\theta'(t)\, e^{-0,2t} - \theta(t)(-0,2e^{-0,2t})}{(e^{-0,2t})^2}$

$$= \frac{e^{-0,2t}(\theta'(t) + 0,2\theta(t))}{(e^{-0,2t})^2}$$

or on sait que $\theta'(t) = -0,2\theta(t) \rightarrow f'(t) = 0$ pour tout t.

b) On a $f(0) = \dfrac{\theta(0)}{e^{-0}} = \dfrac{80}{1} = 80$

et $f'(t) = 0$ pour tout $t \rightarrow f(t) = \text{constante} = f(0) = 80$!

Donc $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{e^{-0,2t}} = 80 \rightarrow \theta(t) = 80\, e^{-0,2t}$

c) On vérifie alors que $\theta(0) = 80 \times e^{-0} = 80 \times 1 = 80$

et $\theta'(t) = 80 \times (-0,2)\, e^{-0,2t} = -0,2\theta(t)$.

2) on reconnait l'utilisation du TVI

La fonction g est ↘ et continue sur $[0;+\infty[$

(car $g'(t) = -70 \times 0,2e^{-0,2t} < 0$ sur $[0;+\infty[$)

On a : $g(0) = 10 + 70e^{-0} = 10 + 70 = 80$

et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 10$ (car $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,2t} = 0$)

Donc le nombre 40 appartient à l'intervalle image $[10;80]$

et d'après le corollaire du TVI, l'équation

$g(t) = 40$ possède une unique solution sur $[0;+\infty[$.

A la calculatrice, on obtient : $t_0 \approx 4,236$ min

≈ 4 min 14 sec.

Exercice 2

Les bonnes réponses sont : 1 → D
2 → C
3 → B
4 → D

Quelques explications (même si elles n'étaient pas demandées)

1) (d) a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{vmatrix}4\\-1\\-1\end{vmatrix}$

et P a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{vmatrix}3\\2\\9\end{vmatrix}$

(B) est faux car $\vec{v}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires

(C) est faux car $\vec{v}$ et $\vec{n}$ ne sont pas $\perp$

(on calcule $\vec{n}\cdot\vec{v} = 3\times 4 + 2\times(-1) + 9\times(-1) = 1 \neq 0$)

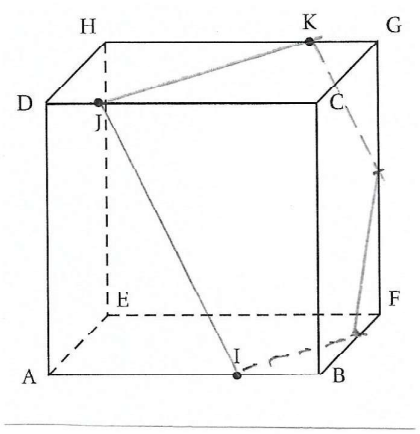
(A) est faux car le point $(3;2;9) \notin P$

(on vérifie $\underbrace{3\times 3}_{\hookrightarrow x} + \underbrace{2\times 2}_{\hookrightarrow y} + \underbrace{9\times 9}_{\hookrightarrow z} - 5 \neq 0$)

(D) est VRAIE car le point $\in$ (d) (avec $t = -89$)

et $\in$ au plan ($3\times(-353) + 2\times 91 + 9\times 98 - 5 = 0$)

2) Pour trouver la réponse, il faut construire la section !



- on trace la parallèle à (JK) passant par I
- et la parallèle à (JI) passant par K
- on relie les deux points obtenus

→ la section est un pentagone.

3) On a : $AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2}$

$\rightarrow AM = \sqrt{(t+2-(-2))^2 + (2-1)^2 + (5t-6-0)^2}$

$\rightarrow AM = \sqrt{(t+4)^2 + 1^2 + (5t-6)^2}$

$= \sqrt{26t^2 - 52t + 53}$ (après développement)

AM est minimale ssi AM^2 est minimale

soit $26t^2 - 52t + 53$

c'est un trinôme pour lequel $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-52)}{2\times 26} = 1$

et $\beta = 26\times 1^2 - 52\times 1 + 53 = 27$

Le minimum de AM^2 est 27 $\rightarrow$ le minimum de AM est $\sqrt{27}$.

4) Les vecteurs normaux des plans sont :

pour P, $\vec{n_1} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix}$ et pour P', $\vec{n_2} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires donc $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont sécants.

Du coup, un vecteur directeur de la droite d'intersection sera forcément $\perp$ avec $\vec{n_1}$ et avec $\vec{n_2}$

Pour l'affirmation (B), on peut calculer $\vec{AB} \begin{vmatrix} 3-5=-2 \\ 1-12=-11 \\ 2-10=-8 \end{vmatrix}$

puis $\vec{n_1}\cdot\vec{AB} = 1\times(-2) + 2\times(-11) + (-3)\times(-8) = 0$

mais $\vec{n_2}\cdot\vec{AB} = 2\times(-2) + (-1)\times(-11) + 0\times(-8) \neq 0$

Et c'est avec le vecteur $\vec{v}$ de l'affirmation (D) que l'on obtient bien $\vec{n_1}\cdot\vec{v} = 0$

et $\vec{n_2}\cdot\vec{v} = 0$.

Exercice 3

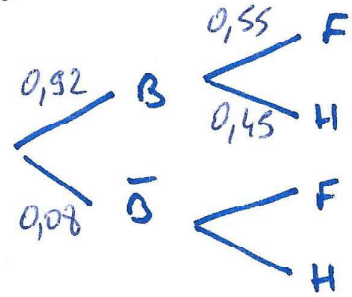
Partie A

on le fait même si il n'est pas demandé.

① on a $P(F) = 0,52$

$P(B) = 0,92$ → arbre de probabilité

$P_B(F) = 0,55$



$p(F) = 0,52$

② ⓐ $p(F \cap B) = p(B) \times p_B(F) = 0,92 \times 0,55 = 0,506$

ⓑ on a $P_F(B) = \dfrac{P(F \cap B)}{p(F)} = \dfrac{0,506}{0,52} \approx 0,97$

③ on a $P_H(\bar{B}) = \dfrac{p(H \cap \bar{B})}{p(H)}$

Formule des probabilités totales

or $p(H) = 1 - p(F) = 0,48$ et $p(H) = p(H \cap B) + p(H \cap \bar{B})$

$\rightarrow 0,48 = 0,92 \times 0,45 + p(H \cap \bar{B})$

On obtient : $p(H \cap \bar{B}) = 0,066$

soit $p_H(\bar{B}) = \dfrac{0,066}{0,48} = 0,1375$

Partie B

on reconnait l'utilisation d'un intervalle de fluctuation asymptotique avec $n = 2000$ et $p = 0,75$

→ les conditions sont vérifiées $n \geq 30$

$np \geq 5$

$n(1-p) \geq 5$

On a : $I_f = \left[p - 1,96 \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$

$\approx [0,731 ; 0,769]$.

or la fréquence observée est $f_{obs} = \dfrac{1421}{2000} = 0,7105$

$\rightarrow f_{obs} \notin I_f$

Donc l'affirmation peut être considérée FAUSSE.

Partie C :

1) on doit vérifier $\int_3^4 f(x)dx = 1$ car il est déjà évident que f est une fonction définie, continue et positive sur $[3;4]$.

Une primitive de f sera F avec $F(x) = -\frac{2}{x-2}$

Donc $\int_3^4 f(x)dx = F(4) - F(3) = -\frac{2}{2} - \left(-\frac{2}{1}\right) = 1$

2) on cherche $P(3,2 \leq x \leq 3,5) = \int_{3,2}^{3,5} f(x)dx = F(3,5) - F(3,2)$

$= \frac{1}{3}$.

3) a) on calcule $G'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1(x-2) - x \times 1}{(x-2)^2}$ $\left(\frac{u}{v}\right)'$

$= \frac{1}{x-2} - \frac{-2}{(x-2)^2} = \frac{x-2+2}{(x-2)^2} = \frac{x}{(x-2)^2}$

$\rightarrow$ on a bien $G'(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$

Donc G est une primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{x}{(x-2)^2}$

b) On cherche $\int_3^4 x f(x)dx = \int_3^4 \frac{2x}{(x-2)^2}dx$

$= 2\int_3^4 \frac{x}{(x-2)^2}dx = 2(G(4) - G(3))$

$\rightarrow \int_3^4 x f(x)dx = 2\left(\ln 2 - \frac{4}{4-2} - \left(\ln 1 - \frac{3}{3-2}\right)\right)$

$= 2(\ln 2 + 1)$

$\rightarrow E(x) = 2(\ln 2 + 1) \approx 3,39$ kg

$\rightarrow$ le panier de fruits aura une masse moyenne d'environ 3,39 kg.

Exercice 4

1) a) on remplace z par $-2i$

sachant que $z^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$

$$z^3 = z \times z^2 = -2i \times (-4) = 8i$$

D'où : $8i + (-2\sqrt{3} + 2i)(-4) + (4 - 4i\sqrt{3})(-2i) + 8i$

$$= 8i + 8\sqrt{3} - 8i - 8i - \underbrace{8i^2}_{i^2 = -1}\sqrt{3} + 8i = 0$$

b) on développe $(z+2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

$$= z^3 - 2\sqrt{3}z^2 + 4z + 2iz^2 - 2i\sqrt{3}z + 8i$$

$$= z^3 + z^2(-2\sqrt{3} + 2i) + z(4 - 2i\sqrt{3}) + 8i$$

c) L'équation (E) correspond à :

$$(z+2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$$

$\rightarrow$ $z + 2i = 0$ ou $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

$z = -2i$ ou ... on calcule $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4$

$= -4$

on obtient : $z_1 = \sqrt{3} + i$

$z_2 = \sqrt{3} - i$

$\hookrightarrow S = \{-2i ; \sqrt{3} + i ; \sqrt{3} - i\}$

d) on a $-2i = 2 \times (-i) = 2e^{-i\pi/2}$ (car $e^{-i\pi/2} = -i$)

$\sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$

$\sqrt{3} - i = 2e^{-i\pi/6}$

$\hookrightarrow |\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$

$= \sqrt{4} = 2$

et $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

soit $\theta = \pi/6$

(on n'oubliera que les racines sont conjuguées)

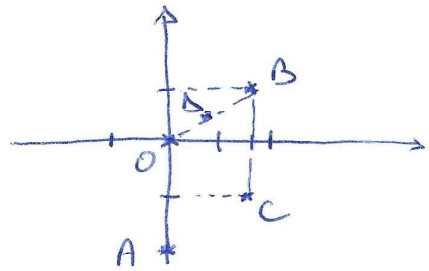
2) on a $OA = |z_A| = |-2i| = 2$

$OB = |z_B| = |\sqrt{3} + i| = 2$ $\left(\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2\right)$

$OC = |z_C| = |\sqrt{3} - i| = 2$

Donc A, B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.

b) cette figure sert surtout à bien voir "l'ordre" des points pour la suite.



c) AOBL est un parallélogramme ssi $z_{\vec{BL}} = z_{\vec{OA}}$

$\rightarrow z_L - z_B = z_A - z_O \rightarrow z_L = z_B + z_A - z_O$

avec $z_B = \dfrac{z_O + z_B}{2}$ (milieu)

On obtient : $z_B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ et $z_L = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

3) a) on a $z\bar{z}' = (x+iy)(x'-iy')$

$= xx' - i^2yy' + iyx' - ixy'$

$= xx' + yy' + i(yx' - xy')$

Donc $z\bar{z}'$ est imaginaire pur ssi sa partie réelle est nulle

soit $xx' + yy' = 0$

soit $\vec{u} \perp \vec{v}$.

b) AOL est rectangle en L ssi $\vec{AL} \perp \vec{OL}$ et d'après a) on calcule donc :

$z_{\vec{AL}} \times \overline{z_{\vec{OL}}} = (z_L - z_A) \times \overline{z_L}$

soit $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i - (-2i)\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)$

$= \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)$

$= \dfrac{3}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{4}i + \dfrac{\sqrt{3}i}{4} + \underbrace{i^2}_{i^2=-1}\dfrac{3}{4} = \sqrt{3}i$

CQFD ! c'est un imaginaire pur !!

Exercice de Spé

① ⓐ on veut résoudre $\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a+b=10 \\ a+2b=10 \end{cases}$

$\rightarrow$ on soustrait les deux égalités $\rightarrow a-b=0$

$\rightarrow a=b=\frac{10}{3} \notin \mathbb{Z}$

Donc on ne peut trouver a et b entiers relatifs !

ⓑ (U,V) n'est pas une base de $\mathcal{L}$ car, par exemple, $\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$ ne peut pas s'écrire dans $\mathcal{L}$ à l'aide de U et V.

② ⓐ $d(A)=1 \Leftrightarrow 6v_2-(-11v_1)=1$ ou $11v_1+6v_2=1$

ⓑ on peut remarquer que $x_0=-1$ et $y_0=2$ conviennent car $11\times(-1)+6\times 2=-11+12=1$

ⓒ On a $11x_0+6y_0=1$

et on veut $11x+6y=1$

Par soustraction, on a : $11(x_0-x)+6(y_0-y)=0$

soit $11(x_0-x)=6(y-y_0)$

or, 6 et 11 sont premiers entre eux.

Donc, d'après le théorème de Gauss, 11 étant un diviseur de $6(y-y_0)$, c'est forcément un diviseur de $y-y_0$.

$\rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,/\, y-y_0=11k \rightarrow y=y_0+11k=2+11k$

et en remplaçant, on en déduit : $x=x_0-6k$
$=-1-6k$

$\rightarrow S=\{-1-6k\,;\,2+11k\}\ k\in\mathbb{Z}$.

ⓓ Il faut prendre $k=-1$ pour avoir $0\leq v_1\leq 10$

car $-1-6\times(-1)=-1+6=5$.

et on a alors $v_2=2+11\times(-1)=2-11=-9$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}$ est la matrice cherchée.

3) a) A est inversible car on a $d(A) \neq 0$

En effet, $d(A) = \det(A) = 6 \times (-9) - (-11) \times 5 = 1 \neq 0$

Pour trouver A^{-1}, on peut à priori utiliser la calculatrice ou on a appris le résultat du cours :

si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

On obtient : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & -5 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$

b) on a $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -11 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a+5b \\ -11a-9b \end{pmatrix}$

$= a\begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$

$= a\,u + b\,v$

c) on veut résoudre $X = a\,u + b\,v$

soit $X = A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

soit $A^{-1}X = \underbrace{A^{-1}A}_{\text{matrice identité}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

soit $A^{-1}X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

On obtient : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -5 \\ 11 & 6 \end{pmatrix} X$

d) pour $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, on a :

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -5 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ 40 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \begin{cases} a = -33 \\ b = 40 \end{cases}$