

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

**SESSION 2019**

## MATHÉMATIQUES

**Série S**

**Enseignement de spécialité – Coefficient 9**

**Durée de l'épreuve : 4 heures**

**L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.**

*Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.*

*Le candidat doit traiter tous les exercices.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.**

**Exercice 1 (5 points)****Commun à tous les candidats**

Les probabilités demandées seront arrondies à 0,01.

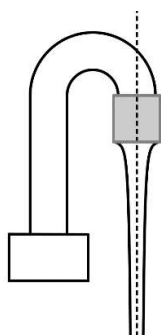
Un commerçant vient de s'équiper d'un distributeur de glaces à l'italienne.

1. La durée, en mois, de fonctionnement sans panne de son distributeur de glaces à l'italienne est modélisée par une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  où  $\lambda$  est un réel strictement positif (on rappelle que la fonction  $f$  de densité de la loi exponentielle est donnée sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ).

Le vendeur de l'appareil assure que la durée moyenne de fonctionnement sans panne de ce type de distributeur, c'est-à-dire l'espérance mathématique de  $X$ , est de 10 mois.

- a. Justifier que  $\lambda = 0,1$ .
  - b. Calculer la probabilité que le distributeur de glaces à l'italienne n'ait connu aucune panne pendant les six premiers mois.
  - c. Sachant que le distributeur n'a connu aucune panne pendant les six premiers mois, quelle est la probabilité qu'il n'en connaisse aucune jusqu'à la fin de la première année ? Justifier.
  - d. Le commerçant remplacera son distributeur de glaces à l'italienne au bout d'un temps  $t$ , exprimé en mois, qui vérifie que la probabilité de l'événement  $(X > t)$  est égale à 0,05. Déterminer la valeur de  $t$  arrondie à l'entier.
2. La notice du distributeur de glaces précise que le distributeur fournit des glaces à l'italienne dont la masse est comprise entre 55 g et 65 g.  
On considère la variable aléatoire  $M$  représentant la masse, en grammes, d'une glace distribuée. On admet que  $M$  suit la loi normale d'espérance 60 et d'écart-type 2,5.
    - a. Calculer la probabilité que la masse d'une glace à l'italienne choisie au hasard parmi celles distribuées soit comprise entre 55 g et 65 g.
    - b. Déterminer la plus grande valeur de  $m$ , arrondie au gramme près, telle que la probabilité  $P(M \geq m)$  soit supérieure ou égale à 0,99.
  3. Le distributeur de glaces à l'italienne permet de choisir un seul des deux parfums : vanille ou fraise. Pour mieux gérer ses achats de matières premières, le commerçant fait l'hypothèse qu'il y aura en proportion deux acheteurs de glace à la vanille pour un acheteur de glace à la fraise. Le premier jour d'utilisation de son distributeur, il constate que sur 120 consommateurs, 65 ont choisi de la glace à la vanille.

Pour quelle raison mathématique pourrait-il mettre en doute son hypothèse ? Justifier.

**Exercice 2 (5 points)****Commun à tous les candidats**

L'écoulement de l'eau d'un robinet a un débit constant et modéré.

On s'intéresse en particulier à une partie du profil d'écoulement représentée en **annexe** par la courbe  $C$  dans un repère orthonormé.

**Partie A**

On considère que la courbe  $C$  donnée en **annexe** est la représentation graphique d'une fonction  $f$  dérivable sur l'intervalle  $]0 ; 1]$  qui respecte les trois conditions suivantes :

$$(H) : f(1) = 0 \quad f'(1) = 0,25 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty.$$

1. La fonction  $f$  peut-elle être une fonction polynôme du second degré ? Pourquoi ?
2. Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; 1]$  par  $g(x) = k \ln x$ .
  - a. Déterminer le réel  $k$  pour que la fonction  $g$  respecte les trois conditions (H).
  - b. La courbe représentative de la fonction  $g$  coïncide-t-elle avec la courbe  $C$  ? Pourquoi ?
3. Soit  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; 1]$  par  $h(x) = \frac{a}{x^4} + bx$  où  $a$  et  $b$  sont des réels. Déterminer  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $h$  respecte les trois conditions (H).

**Partie B**

On admet dans cette partie que la courbe  $C$  est la représentation graphique d'une fonction  $f$  continue, strictement croissante, définie et dérivable sur l'intervalle  $]0 ; 1]$  d'expression :

$$f(x) = \frac{1}{20} \left( x - \frac{1}{x^4} \right).$$

1. Justifier que l'équation  $f(x) = -5$  admet sur l'intervalle  $]0 ; 1]$  une unique solution qui sera notée  $\alpha$ . Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
2. On admet que le volume d'eau en  $\text{cm}^3$ , contenu dans les 5 premiers centimètres de l'écoulement, est donné par la formule :  $V = \int_{\alpha}^1 \pi x^2 f'(x) dx$ .
  - a. Soit  $u$  la fonction dérivable sur  $]0 ; 1]$  définie par  $u(x) = \frac{1}{2x^2}$ . Déterminer sa fonction dérivée.
  - b. Déterminer la valeur exacte de  $V$ . En utilisant la valeur approchée de  $\alpha$  obtenue à la question 1, donner alors une valeur approchée de  $V$ .

**Exercice 3 (5 points)****Commun à tous les candidats**

On considère la suite  $(I_n)$  définie par  $I_0 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} dx$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul  $I_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx$ .

1. Montrer que  $I_0 = \ln(2)$ .
2.
  - a. Calculer  $I_0 - I_1$ .
  - b. En déduire  $I_1$ .
3.
  - a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$ .
  - b. Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel  $n$  donné, la valeur de  $I_n$ .
4. Soit  $n$  un entier naturel non nul.  
On admet que si  $x$  appartient à l'intervalle  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  alors  $0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .
  - a. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$ .
  - b. En déduire la limite de la suite  $(I_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
5. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$ .
  - a. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $S_n = I_0 - I_n$ .
  - b. Déterminer la limite de  $S_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 4 (5 points) Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et les suites d'entiers naturels  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :  
 $u_0 = 1, v_0 = 0$ , et pour tout entier naturel  $n$ ,  $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ .

**Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.**

**Partie A**

On a calculé les premiers termes de la suite  $(v_n)$  :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$v_n$	0	1	4	15	56	209	780	2911	10864	40545	151316	564719	2107560

1. Conjecturer les valeurs possibles du chiffre des unités des termes de la suite  $(v_n)$ .
2. On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ v_{n+3} \end{pmatrix} = M^3 \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ .
  - a. Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\begin{cases} u_{n+3} = 26u_n + 45v_n \\ v_{n+3} = 15u_n + 26v_n \end{cases}$ .
  - b. En déduire que pour tout entier naturel  $n$  :  $v_{n+3} \equiv v_n \pmod{5}$ .
3. Soit  $r$  un entier naturel fixé. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout entier naturel  $q$ ,  $v_{3q+r} \equiv v_r \pmod{5}$ .
4. En déduire que pour tout entier naturel  $n$  le terme  $v_n$  est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 5.
5. Conclure quant à l'ensemble des valeurs prises par le chiffre des unités des termes de la suite  $(v_n)$ .

**Partie B**

L'objectif de cette partie est de démontrer que  $\sqrt{3}$  n'est pas un nombre rationnel en utilisant la matrice  $M$ .

Pour cela, on effectue un raisonnement par l'absurde et on suppose que  $\sqrt{3}$  est un nombre rationnel. Dans ce cas,  $\sqrt{3}$  peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible  $\frac{p}{q}$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers naturels non nuls, avec  $q$  le plus petit entier naturel possible.

1. Montrer que  $q < p < 2q$ .
2. On admet que la matrice  $M$  est inversible. Donner son inverse  $M^{-1}$  (aucune justification n'est attendue).

Soit le couple  $(p', q')$  défini par  $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ .

3.
  - a. Vérifier que  $p' = 2p - 3q$  et que  $q' = -p + 2q$ .
  - b. Justifier que  $(p', q')$  est un couple d'entiers relatifs.
  - c. On rappelle que  $p = q\sqrt{3}$ . Montrer que  $p' = q'\sqrt{3}$ .
  - d. Montrer que  $0 < q' < q$ .
  - e. En déduire que  $\sqrt{3}$  n'est pas un rationnel.

Annexe (exercice 2) :

