BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2019

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **9**

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (6 *points*)

Commun à tous les candidats

Partie A

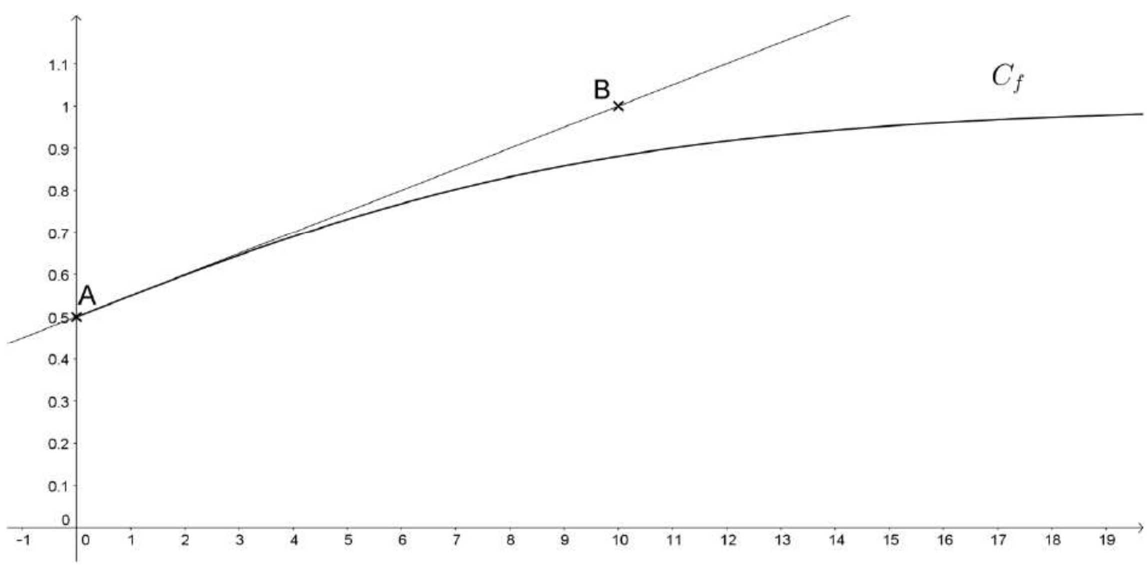
Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1 + \mathrm{e}^{-bx}}$$

La courbe C_f représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

La courbe C_f passe par le point $\mathrm{A}(0\,;0{,}5)$.

La tangente à la courbe C_f au point A passe par le point $\mathrm{B}(10\,;1)$.



1. Justifier que $a = 1$.

   On obtient alors, pour tout réel $x \geq 0$,
   $$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-bx}}$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$,
   $$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{(1 + \mathrm{e}^{-bx})^2}$$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-0,2x}}$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1^{er} janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1^{er} janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1^{er} janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.

2.

- **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0\,;+\infty[$.
- **b.** Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.
- **c.** Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse $95\ \%$, le marché est saturé.
Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.

4. On définit la proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 par

$$m = \frac{1}{2}\int_{8}^{10} p(x)\,\mathrm{d}x$$

- **a.** Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$,

$$p(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1 + \mathrm{e}^{0,2x}}$$

- **b.** En déduire une primitive de la fonction p sur $[0\,;+\infty[$.
- **c.** Déterminer la valeur exacte de m et son arrondi au centième.

Exercice 2 (5 *points*)

Commun à tous les candidats

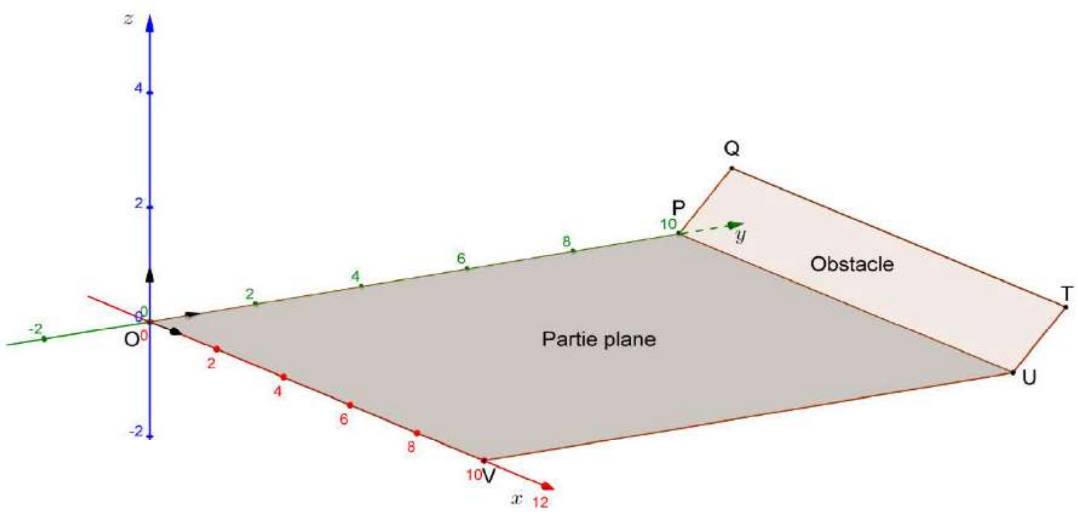
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Alex et Élisa, deux pilotes de drones, s'entraînent sur un terrain constitué d'une partie plane qui est bordée par un obstacle.

On considère un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, une unité correspondant à dix mètres. Pour modéliser le relief de la zone, on définit six points O, P, Q, T, U et V par leurs coordonnées dans ce repère :

$O(0\,;0\,;0)$, $P(0\,;10\,;0)$, $Q(0\,;11\,;1)$, $T(10\,;11\,;1)$, $U(10\,;10\,;0)$ et $V(10\,;0\,;0)$

La partie plane est délimitée par le rectangle $OPUV$ et l'obstacle par le rectangle $PQTU$.



Les deux drones sont assimilables à deux points et on suppose qu'ils suivent des trajectoires rectilignes :

- le drone d'Alex suit la trajectoire portée par la droite (AB) avec $A(2\,;4\,;0{,}25)$ et $B(2\,;6\,;0{,}75)$;
- le drone d'Élisa suit la trajectoire portée par la droite (CD) avec $C(4\,;6\,;0{,}25)$ et $D(2\,;6\,;0{,}25)$.

Partie A : Étude de la trajectoire du drone d'Alex

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2.

a. Justifier que le vecteur $\vec{n}(0\,;1\,;-1)$ est un vecteur normal au plan (PQU).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQU).

3. Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées$\left(2\ ;\ \frac{37}{3}\ ;\ \frac{7}{3}\right)$.
4. Expliquer pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

Partie B : Distance minimale entre les deux trajectoires

Pour éviter une collision entre leurs deux appareils, Alex et Élisa imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires de leurs drones.

L'objectif de cette partie est de vérifier si cette consigne est respectée.

Pour cela, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD).

Il existe alors deux réels a et b tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = a\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CN}} = b\,\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.
On s'intéresse donc à la distance MN.

1. Démontrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ sont $(2-2b\ ;2-2a\ ;\ -0{,}5a)$.

2. On admet que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. On admet également que la distance MN est minimale lorsque la droite (MN) est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (CD).
   Démontrer alors que la distance MN est minimale lorsque $a = \frac{16}{17}$ et $b = 1$.

3. En déduire la valeur minimale de la distance MN puis conclure.

Exercice 3 (4 *points*)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.
On considère le nombre complexe $c=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et les points S et T d'affixes respectives c^2 et $\frac{1}{c}$.

1. **Affirmation 1 :**
   Le nombre c peut s'écrire $c=\frac{1}{4}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$.

2. **Affirmation 2 :**
   Pour tout entier naturel n, c^{3n} est un nombre réel.

3. **Affirmation 3 :**
   Les points O, S et T sont alignés.

4. **Affirmation 4 :**
   Pour tout entier naturel non nul n, $|c|+|c^2|+\cdots+|c^n|=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 4 (5 *points*)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On étudie l'évolution quotidienne des conditions météorologiques d'un village sur une certaine période. On suppose que, pour un jour donné, il existe trois états météorologiques possibles : « ensoleillé », « nuageux sans pluie » et « pluvieux ».

On sait que :

- si le temps est ensoleillé un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est $0{,}5$ et celle qu'il soit pluvieux est $0{,}1$;
- si le temps est nuageux sans pluie un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est $0{,}2$ et celle qu'il soit pluvieux est $0{,}7$;
- si le temps est pluvieux un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est $0{,}6$ et celle qu'il soit ensoleillé $0{,}2$.

Pour tout entier naturel n, on note les événements :

- A_n : « le temps est ensoleillé au bout de n jours» ;
- B_n : « le temps est nuageux sans pluie au bout de n jours» ;
- C_n : « le temps est pluvieux au bout de n jours».

.

Pour tout entier naturel n, on note respectivement a_n, b_n et c_n les probabilités des événements A_n, B_n et C_n. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$.

On suppose qu'initialement, le temps est ensoleillé.
On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}1b_n + 0{,}2c_n$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}3a_n - 0{,}1b_n + 0{,}2$.

On admet que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 0{,}2a_n + 0{,}2$.

2. On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}1 \\ 0{,}2 & 0 \end{pmatrix},\ U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$$

a. Justifier que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + R$.

b. Soit $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tel que $Y = MY + R$. Démontrer que $\alpha = \beta = 0{,}25$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - Y$.

a. En utilisant la question **2.**, vérifier que, pour tout entier naturel n,

$$V_{n+1} = MV_n$$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif,

$$V_n = M^n V_0$$

4. On admet que, pour tout entier naturel strictement positif n,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2 \times 0{,}2^n - 0{,}1^n & 0{,}1^n - 0{,}2^n \\ 2 \times 0{,}2^n - 2 \times 0{,}1^n & 2 \times 0{,}1^n - 0{,}2^n \end{pmatrix}$$

a. Déterminer l'expression de a_n en fonction de l'entier strictement positif n.

b. Déterminer la limite de la suite (a_n).

5. On admet que, pour tout entier naturel n, $c_n = 0{,}5 + 3 \times 0{,}1^n - 3{,}5 \times 0{,}2^n$.
La probabilité que le temps soit pluvieux au bout de n jours peut-elle dépasser $0{,}5$?