

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le sujet comporte deux feuilles d'annexes à la page 8/9 et 9/9, à remettre avec la copie.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

Partie A

À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

A l'évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;

C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».

On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $P(C) = 0,03x + 0,95$.
2. À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable. Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Partie B

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans.
Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.
2. Calculer $P(Z > 2)$.
3. Sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

Partie C

On note X la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100g de chocolat commercialisable. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu=85$ et d'écart type $\sigma=2$.

1. Calculer $P(83 \leq X \leq 87)$.

Quelle est la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage ?

2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que :

$$P(85 - a \leq X \leq 85 + a) = 0,9.$$

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. La chocolaterie vend un lot de 10 000 tablettes de chocolat à une enseigne de la grande distribution. Elle affirme au responsable achat de l'enseigne que, dans ce lot, 90 % des tablettes ont un pourcentage de cacao appartenant à l'intervalle $[81,7 ; 88,3]$.

Afin de vérifier si cette affirmation n'est pas mensongère, le responsable achat fait prélever 550 tablettes au hasard dans le lot et constate que, sur cet échantillon, 80 ne répondent pas au critère.

Au vu de l'échantillon prélevé, que peut-on conclure quant à l'affirmation de la chocolaterie ?

EXERCICE 2 (3 points)

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère l'équation $(E): z^2 - 6z + c = 0$ où c est un réel strictement supérieur à 9.

a. Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

b. Justifier que les solutions de (E) sont $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.

2. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B .

Justifier que le triangle OAB est isocèle en O .

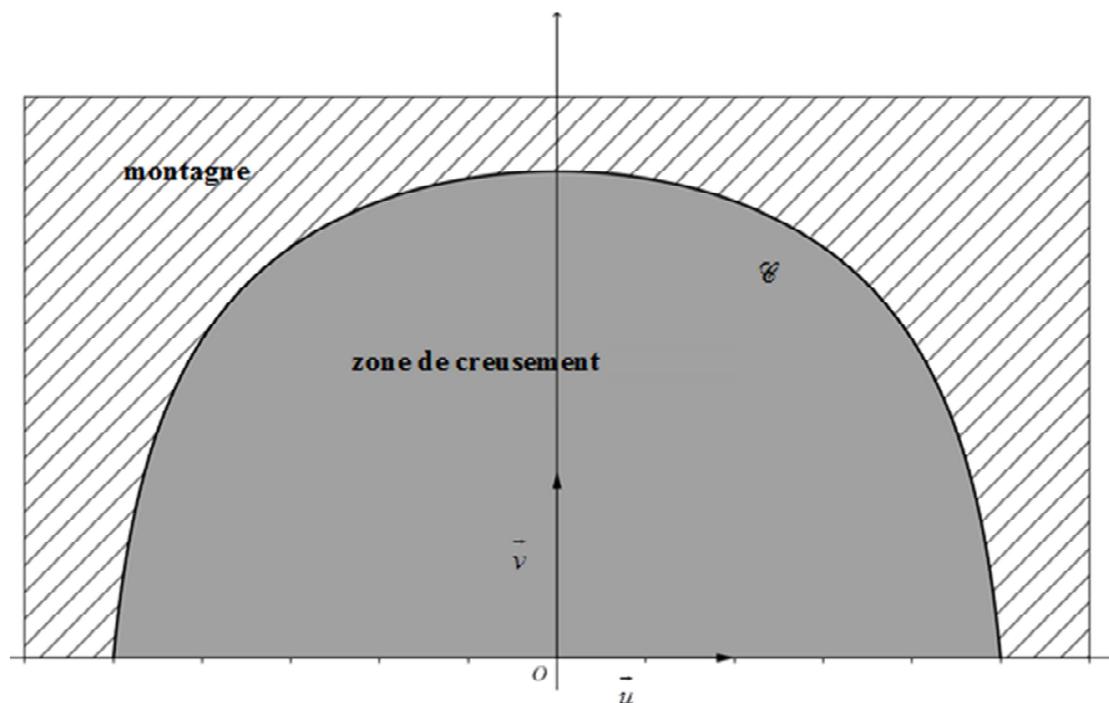
3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne.

Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} .



On admet que \mathcal{C} est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2,5; 2,5]$ par :

$$f(x) = \ln(-2x^2 + 13,5).$$

L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [-2,5; 2,5]$.
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur $[-2,5; 2,5]$.
En déduire le signe de f sur $[-2,5; 2,5]$.

Partie B : Aire de la zone de creusement

On admet que la courbe \mathcal{C} est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

1. La courbe \mathcal{C} est-elle un arc de cercle de centre O ? Justifier la réponse.
2. Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est $\mathcal{A} = 8 \int_0^{2,5} f(x) dx$.
3. L'algorithme, donné en annexe page 8/9, permet de calculer une valeur approchée par défaut de $I = \int_0^{2,5} f(x) dx$, notée a .

On admet que : $a \leq I \leq a + \frac{f(0) - f(2,5)}{n} \times 2,5$

- a. Le tableau fourni en annexe, page 8/9, donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.
Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.
- b. En déduire une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_0 = v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + v_n.$$

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls.

Partie A : Conjectures

Flore a calculé les premiers termes des suites à l'aide d'un tableur.

Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	3
4	2	19	13
5	3	77	51
6	4	307	205

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des suites ?
2. Soit n un entier naturel.
Conjecturer la valeur de $\text{PGCD}(u_n ; v_n)$. Aucune justification n'est demandée.
3. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Flore obtient les résultats suivants :

12	10	1258291	838861
13	11	5033165	3355443
14	12	20132659	13421773
15	13	80530637	53687091

Elle émet la conjecture : « la suite $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ converge ».

Qu'en penser ?

Partie B : Étude arithmétique

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$.
2. Soit n un entier naturel.
Déduire de la question précédente la valeur de $\text{PGCD}(u_n ; v_n)$.

Partie C : Étude matricielle

Pour tout entier naturel n , on définit :

- la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,
- les matrices carrées $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}$.

1. a. Montrer que la matrice $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P .

b. On admet que, pour tout entier naturel n , on a $X_n = Q_n P^{-1} X_0$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a
$$\begin{cases} u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n = \frac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5} \end{cases}.$$

2. a. Vérifier que, pour tout entier naturel n , on a
$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}.$$

b. En déduire la limite de la suite $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

EXERCICE 5 (3 points)

Commun à tous les candidats

On considère un cube $ABCDEFGH$ fourni en annexe page 9/9.

L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On note \mathcal{P} le plan d'équation $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0$.

Construire, sur la figure fournie en annexe page 9/9, la section du cube par le plan \mathcal{P} .

La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.

ANNEXE à compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 3

Variables	R et S sont des réels n et k sont des entiers		
Traitement	S prend la valeur 0 Demander la valeur de n Pour k variant de 1 à n faire <table border="1" style="margin-left: 20px; width: 80%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">R prend la valeur $\frac{2,5}{n} \times f\left(\frac{2,5}{n} \times k\right)$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">S prend la valeur $S + R$</td> </tr> </table> Fin Pour Afficher S	R prend la valeur $\frac{2,5}{n} \times f\left(\frac{2,5}{n} \times k\right)$	S prend la valeur $S + R$
R prend la valeur $\frac{2,5}{n} \times f\left(\frac{2,5}{n} \times k\right)$			
S prend la valeur $S + R$			

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de R et de S , arrondies à 10^{-6} , obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.

Initialisation	$S = 0$ $n = 50$			
Boucle Pour	Étape k	R	S	
	1	
	2	0,130 060	0,260 176	
	3	0,129 968	0,390 144	
	4	0,129 837	
	⋮		⋮	
	24	0,118 137	3,025 705	
	25	0,116 970	3,142 675	
	⋮		⋮	
	49	0,020 106	5,197 538	
	50	
Affichage	$S =$			

ANNEXE à compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 5

