

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6 dont une annexe en page 6/6 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

La société Fibration fournit des abonnements Internet et des abonnements de téléphone mobile. Un client de la société Fibration souscrit soit un abonnement Internet, soit un abonnement de téléphone mobile, il ne cumule pas les deux. En cas de difficulté, la société Fibration propose à ses clients une ligne d'assistance téléphonique : le client doit d'abord signaler s'il est client Internet ou s'il est client mobile puis son appel est mis en attente de réponse par un opérateur.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3} .

Partie A - Durée d'attente

- Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client Internet lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur. Une étude permet de modéliser cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_1 qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,6.
 - Quelle est la durée d'attente moyenne que peut espérer un client Internet qui appelle cette ligne d'assistance ?
 - Calculer la probabilité que la durée d'attente d'un client Internet choisi au hasard soit inférieure à 5 minutes.
- Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client mobile lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur. On modélise cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_2 qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , λ étant un réel strictement positif.
 - Sachant que $P(D_2 \leq 4) = 0,798$, déterminer la valeur de λ .
 - En prenant $\lambda = 0,4$, peut-on considérer que moins de 10 % des clients mobile choisis au hasard attendent plus de 5 minutes avant de joindre un opérateur ?

Partie B - Obtention d'un opérateur

Si la durée d'attente avant l'obtention d'un opérateur dépasse 5 minutes, l'appel prend automatiquement fin. Sinon, l'appelant obtient un opérateur.

On choisit au hasard un client qui appelle la ligne d'assistance.

On admet que la probabilité que l'appel émane d'un client Internet est 0,7.

De plus, d'après la partie A, on prend les données suivantes :

Si l'appel provient d'un client Internet alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,95.

Si l'appel provient d'un client mobile alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,87.

- Déterminer la probabilité que le client joigne un opérateur.
- Un client se plaint que son appel a pris fin après 5 minutes d'attente sans avoir obtenu d'opérateur. Est-il plus probable que ce soit un client Internet ou un client mobile ?

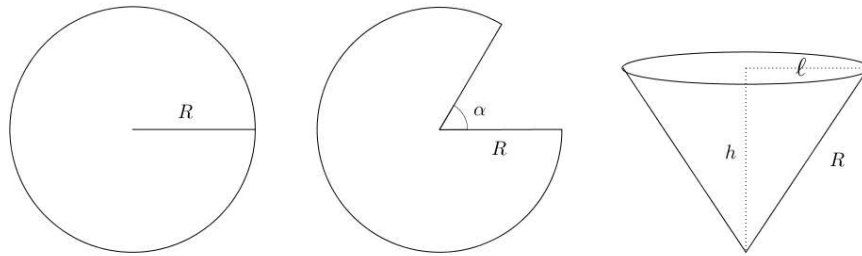
Partie C - Enquête de satisfaction

La société annonce un taux de satisfaction de 85% pour ses clients ayant appelé et obtenu un opérateur.

Une association de consommateurs souhaite vérifier ce taux et interroge 1 303 personnes. Parmi celles-ci, 1 150 se disent satisfaites. Que pensez-vous du taux de satisfaction annoncé par la société ?

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats



Dans un disque en carton de rayon R , on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose les bords afin de créer un cône de révolution. On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.

On appelle ℓ le rayon de la base circulaire de ce cône et h sa hauteur.

On rappelle que :

- le volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire \mathcal{A} et de hauteur h est $\frac{1}{3}\mathcal{A}h$.
- la longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle θ , exprimé en radians, est $r\theta$.

1. On choisit $R = 20$ cm.

- a) Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h , est $V(h) = \frac{1}{3}\pi(400 - h^2)h$.
- b) Justifier qu'il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximum. Donner cette valeur.
- c) Comment découper le disque en carton pour avoir un volume maximum ? Donner un arrondi de α au degré près.

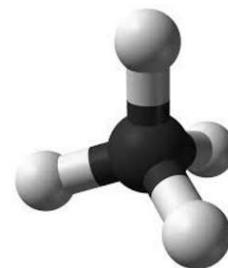
2. L'angle α dépend-il du rayon R du disque en carton ?

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :

- Les noyaux d'atomes d'hydrogène occupent les positions des quatre sommets d'un tétraèdre régulier.
- Le noyau de carbone au centre de la molécule est à égale distance des quatre atomes d'hydrogène.



L'objectif est de déterminer une mesure de l'angle entre deux liaisons carbone-hydrogène.

Un tétraèdre régulier est un polyèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

1. Justifier qu'on peut inscrire ce tétraèdre dans un cube $ABCDEFGH$ en positionnant deux atomes d'hydrogène sur les sommets A et C du cube et les deux autres atomes d'hydrogène sur deux autres sommets du cube.

Représenter la molécule dans le cube donné en **annexe** page 6/6.

Dans la suite de l'exercice, on pourra travailler dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

2. Démontrer que l'atome de carbone est au centre Ω du cube.
3. Déterminer l'arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle que forment entre elles les liaisons carbone-hydrogène c'est-à-dire l'angle $\widehat{A\Omega C}$.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

Une personne a mis au point le procédé de cryptage suivant :

- À chaque lettre de l'alphabet, on associe un entier n comme indiqué ci-dessous :

| | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

- On choisit deux entiers a et b compris entre 0 et 25.
- Tout nombre entier n compris entre 0 et 25 est codé par le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.

Le tableau suivant donne les fréquences f en pourcentage des lettres utilisées dans un texte écrit en français.

| | | | | | | | | | | | | | |
|--------|------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Lettre | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| f | 9,42 | 1,02 | 2,64 | 3,38 | 15,87 | 0,94 | 1,04 | 0,77 | 8,41 | 0,89 | 0,00 | 5,33 | 3,23 |
| Lettre | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| f | 7,14 | 5,13 | 2,86 | 1,06 | 6,46 | 7,90 | 7,26 | 6,24 | 2,15 | 0,00 | 0,30 | 0,24 | 0,32 |

Partie A

Un texte écrit en français et suffisamment long a été codé selon ce procédé. L'analyse fréquentielle du texte codé a montré qu'il contient 15,9% de O et 9,4 % de E.

On souhaite déterminer les nombres a et b qui ont permis le codage.

1. Quelles lettres ont été codées par les lettres O et E?
2. Montrer que les entiers a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} 4a + b \equiv 14 \pmod{26} \\ b \equiv 4 \pmod{26}. \end{cases}$$

3. Déterminer tous les couples d'entiers (a, b) ayant pu permettre le codage de ce texte.

Partie B

1. On choisit $a = 22$ et $b = 4$.
 - a) Coder les lettres K et X.
 - b) Ce codage est-il envisageable?
2. On choisit $a = 9$ et $b = 4$.
 - a) Montrer que pour tous entiers naturels n et m , on a

$$m \equiv 9n + 4 \pmod{26} \iff n \equiv 3m + 14 \pmod{26}$$

- b) Décoder le mot AQ.

Annexe

À rendre avec la copie

