BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 dont une annexe en page 7/7 qui est à rendre avec la copie.

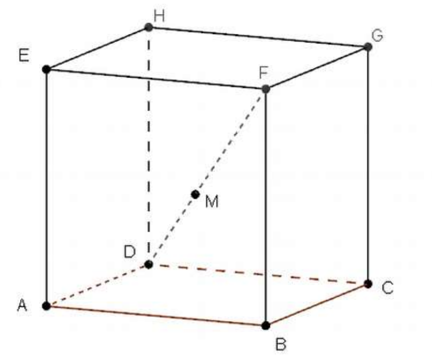
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

On considère un cube $ABCDEFGH$ dont la représentation en perspective cavalière est donnée ci-contre.
Les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$.



Partie A

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).
3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).
   On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

Partie B

À tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que $\overrightarrow{DM} = x\,\overrightarrow{DF}$. On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ lorsque le point M parcourt le segment $[DF]$. On a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?

2.a) Justifier que les coordonnées du point M sont $(x\,;x\,;x)$.

b) Montrer que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$.

3. On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$.

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Variations de f	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

Pour quelles positions du point M sur le segment $[DF]$:

a) le triangle MEB est-il rectangle en M ?

b) l'angle θ est-il maximal ?

EXERCICE 2 **(6 points)**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on étudie quelques grandeurs caractéristiques du fonctionnement des parkings d'une ville.
Dans tout l'exercice, les probabilités seront données avec une précision de 10^{-4}.

*Les parties **A**, **B**, et **C** sont indépendantes.*

Partie A - Durée d'attente pour entrer dans un parking souterrain

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. Le tableau suivant présente les observations faites sur une journée.

Durée d'attente en minute	$[0\,;2[$	$[2\,;4[$	$[4\,;6[$	$[6\,;8[$
Nombre de voitures	75	19	10	5

1. Proposer une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.

2. On décide de modéliser cette durée d'attente par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ (exprimé en minute).

a) Justifier que l'on peut choisir $\lambda = 0,5$ min.

b) Une voiture se présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière ?

c) Une voiture attend à l'entrée du parking depuis une minute. Quelle est la probabilité qu'elle franchisse la barrière dans la minute suivante ?

Partie B - Durée et tarifs de stationnement dans ce parking souterrain

Une fois garée, la durée de stationnement d'une voiture est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 70$ min et d'écart-type $\sigma = 30$ min.

1.a) Quelle est la durée moyenne de stationnement d'une voiture ?

b) Un automobiliste entre et se gare dans le parking. Quelle est la probabilité que sa durée de stationnement dépasse deux heures ?

c) À la minute près, quel est le temps maximum de stationnement pour au moins 99 % des voitures ?

2. La durée de stationnement est limitée à trois heures. Le tableau donne le tarif de la première heure et chaque heure supplémentaire est facturée à un tarif unique. Toute heure commencée est due intégralement.

Durée de stationnement	Inférieure à 15 min	Entre 15 min et 1 h	Heure supplémentaire
Tarif en euros	Gratuit	3,5	t

Déterminer le tarif t de l'heure supplémentaire que doit fixer le gestionnaire du parking pour que le prix moyen de stationnement d'une voiture soit de 5 euros.

Partie C - Temps d'attente pour se garer dans un parking de centre-ville

La durée de stationnement d'une voiture dans un parking de centre-ville est modélisée par une variable aléatoire T' qui suit une loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'. On sait que la moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes et que 75 % des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 minutes.
Le gestionnaire du parking vise l'objectif que 95 % des voitures aient un temps de stationnement entre 10 et 50 minutes. Cet objectif est-il atteint ?

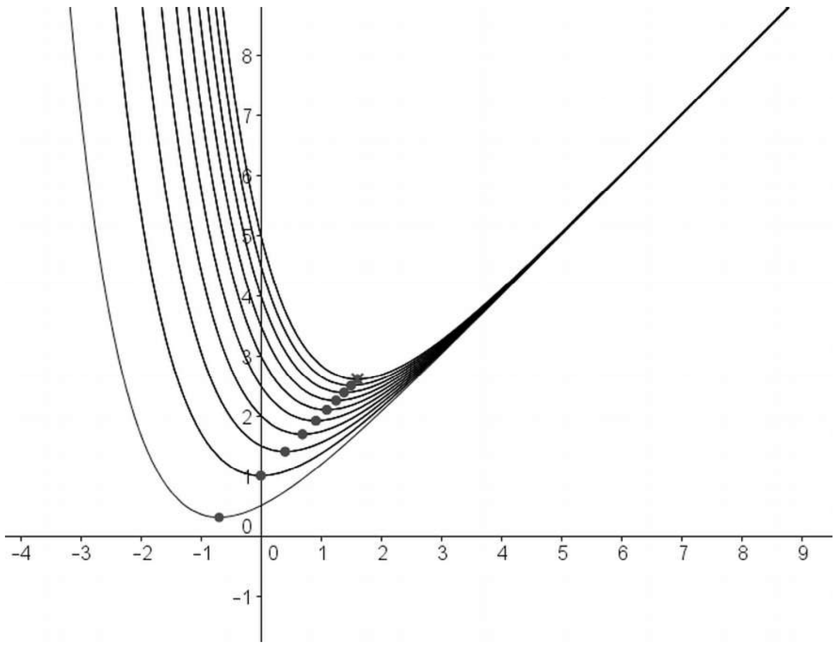
EXERCICE 3 (3 points)

Commun à tous les candidats

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé. On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.

Est-ce le cas ?

Exercice 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un numéro de carte bancaire est de la forme :

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ c$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.
Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.
c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.
L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

```
Initialisation : I prend la valeur 0
                 P prend la valeur 0
                 R prend la valeur 0
   Traitement :  Pour k allant de 0 à 7 :
                 | R prend la valeur du reste de la division euclidienne de 2a_{2k+1} par 9
                 | I prend la valeur I + R
                 Fin Pour
                 Pour k allant de 1 à 7 :
                 | P prend la valeur P + a_{2k}
                 Fin Pour
                 S prend la valeur I + P + c
       Sortie :  Si S est un multiple de 10 alors :
                 | Afficher « Le numéro de la carte est correct. »
                 Sinon :
                 | Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. »
                 Fin Si
```

1. On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.

a) Compléter le tableau en annexe permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.

b) Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.

c) On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6. Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu $6a35$ 4002 9561 3411 reste correct ?

2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire. Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.

3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.

4. On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.
On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.
Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?

Annexe

À rendre avec la copie

Exercice 4 - Question 1. a)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2a_{2k+1}$								
R								
I								

Modèle CMEN-DOC v2 A4 ©NEOPTEC

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Inscription :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)