BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

SPÉCIALITÉ

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, les valeurs seront, si nécessaire, approchées au millième.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans le cadre de son activité, une entreprise reçoit régulièrement des demandes de devis. Les montants de ces devis sont calculés par son secrétariat. Une étude statistique sur l'année écoulée conduit à modéliser le montant des devis par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 2900$ euros et d'écart-type $\sigma = 1250$ euros.

1. Si on choisit au hasard une demande de devis reçue par l'entreprise, quelle est la probabilité que le montant du devis soit supérieur à 4000 euros ?
2. Afin d'améliorer la rentabilité de son activité, l'entrepreneur décide de ne pas donner suite à 10 % des demandes. Il écarte celles dont le montant de devis est le moins élevé. Quel doit être le montant minimum d'un devis demandé pour que celui-ci soit pris en compte ? Donner ce montant à l'euro près.

Partie B

Ce même entrepreneur décide d'installer un logiciel anti-spam. Ce logiciel détecte les messages indésirables appelés spams (messages malveillants, publicités, etc.) et les déplace dans un fichier appelé "dossier spam". Le fabricant affirme que 95 % des spams sont déplacés. De son côté, l'entrepreneur sait que 60 % des messages qu'il reçoit sont des spams. Après installation du logiciel, il constate que $58,6$ % des messages sont déplacés dans le dossier spam.
Pour un message pris au hasard, on considère les événements suivants :

- D : « le message est déplacé » ;
- S : « le message est un spam ».

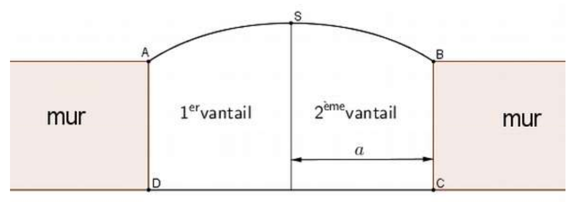
1. Calculer $\mathrm{P}(S \cap D)$.
2. On choisit au hasard un message qui n'est pas un spam. Montrer que la probabilité qu'il soit déplacé est égale à $0,04$.
3. On choisit au hasard un message non déplacé. Quelle est la probabilité que ce message soit un spam ?
4. Pour le logiciel choisi par l'entreprise, le fabricant estime que $2,7$ % des messages déplacés vers le dossier spam sont des messages fiables. Afin de tester l'efficacité du logiciel, le secrétariat prend la peine de compter le nombre de messages fiables parmi les messages déplacés. Il trouve 13 messages fiables parmi les 231 messages déplacés pendant une semaine.
   Ces résultats remettent-ils en cause l'affirmation du fabricant ?

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leqslant 2$.

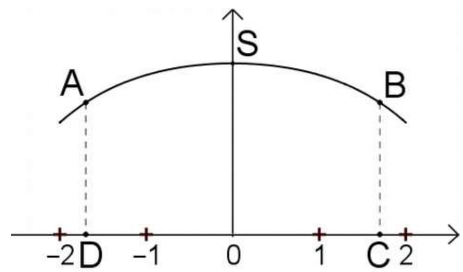
Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-contre. Les côtés $[AD]$ et $[BC]$ sont perpendiculaires au seuil $[CD]$ du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.



Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par :

$$f(x) = -\frac{b}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4} \quad \text{où } b > 0.$$

Le repère est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $\left(-a\ ;\ f(-a)\right)$, $\left(a\ ;\ f(a)\right)$, $(a\ ;\ 0)$ et $(-a\ ;\ 0)$ et on note S le sommet de la courbe de f, comme illustré ci-contre.



Partie A

1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$:
$$f'(x) = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right).$$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b.

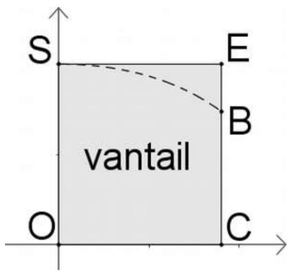
Partie B

La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b.

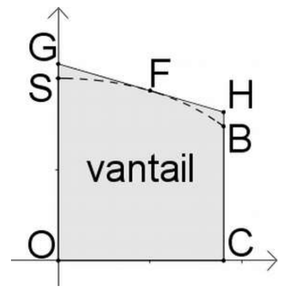
1. Justifier que $b = 1$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\ ;2]$ et en déduire une valeur approchée de a au centième.
3. Dans cette question, on choisit $a = 1,8$ et $b = 1$. Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à 20 kg.m^{-2}. Que décide le client ?

Partie C

On conserve les valeurs $a = 1{,}8$ et $b = 1$.
Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle $OCES$, soit un trapèze $OCHG$ comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse 1.



Forme 1 : découpe dans un rectangle



Forme 2 : découpe dans un trapèze

La forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semble plus économique.
Évaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1.

On rappelle la formule donnant l'aire d'un trapèze. En notant b et B respectivement les longueurs de la petite base et de la grande base du trapèze (côtés parallèles) et h la hauteur du trapèze :

$$Aire = \frac{b+B}{2} \times h.$$

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs. On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

* $u_0 > 1$,
* pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$.
* pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.

2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$. On a en particulier $s_1 = u_0$.

a) Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

b) En déduire que pour tout entier $n > 0$,

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}.$$

c) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 1$.

3. À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.

a) Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.

b) Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

Entrée :	Saisir n
	Saisir u
Traitement :	s prend la valeur u
	Pour i allant de 1 à n :
	| u prend la valeur ...
	| s prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

4.a) Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.

b) En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une association gère des activités pour des enfants. Elle propose deux programmes d'activités, le programme A : cirque - éveil musical, et le programme B : théâtre - arts plastiques.
À sa création en 2014, l'association compte 150 enfants qui suivent tous le programme A.
Pour chacune des années suivantes, le nombre d'enfants inscrits dans l'association reste égal à 150.
On dispose également des informations suivantes :
Chaque enfant ne peut suivre qu'un seul programme : soit le programme A, soit le programme B.
D'une année à l'autre, 20 % des inscrits au programme A choisissent à nouveau le programme A, alors que 40 % choisissent le programme B. Les autres quittent l'association.
D'une année à l'autre, 60 % des inscrits au programme B choisissent à nouveau le programme B et les autres quittent l'association.
Les nouveaux inscrits, qui compensent les départs, suivent obligatoirement le programme A.

On modélise le nombre d'inscrits au programme A et le nombre d'inscrits au programme B durant l'année $2014+n$ respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) et on note U_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$. On a donc $U_0 = \begin{pmatrix} 150 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = U_n M$ où $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix}$.
3. En déduire la répartition des effectifs à long terme entre les deux programmes.

Partie B

L'association affecte à chaque enfant un numéro à 6 chiffres $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 k$. Les deux premiers chiffres représentent l'année de naissance de l'enfant, les trois suivants sont attribués à l'enfant au moment de sa première inscription. Le dernier chiffre, appelé clé de contrôle, est calculé automatiquement de la façon suivante :

- on effectue la somme $S = c_1 + c_3 + c_5 + a \times (c_2 + c_4)$ où a est un entier compris entre 1 et 9 ;
- on effectue la division euclidienne de S par 10, le reste obtenu est la clé k.

Lorsqu'un employé saisit le numéro à 6 chiffres d'un enfant, on peut détecter une erreur de saisie lorsque le sixième chiffre n'est pas égal à la clé de contrôle calculée à partir des cinq premiers chiffres.

1. Dans cette question seulement, on choisit $a = 3$.
   a) Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association ?
   b) L'employé, confondant un frère et une sœur, échange leurs années de naissance : 2008 et 2011. Ainsi, le numéro $08c_3c_4c_5k$ est transformé en $11c_3c_4c_5k$. Cette erreur est-elle détectée grâce à la clé ?
2. On note $c_1c_2c_3c_4c_5k$ le numéro d'un enfant. On cherche les valeurs de l'entier a pour lesquelles la clé détecte systématiquement la faute de frappe lorsque les chiffres c_3 et c_4 sont intervertis. On suppose donc que les chiffres c_3 et c_4 sont distincts.

a) Montrer que la clé ne détecte pas l'erreur d'interversion des chiffres c_3 et c_4 si et seulement si $(a-1)(c_4-c_3)$ est congru à 0 modulo 10.

b) Déterminer les entiers n compris entre 0 et 9 pour lesquels il existe un entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0\ (10)$.

c) En déduire les valeurs de l'entier a qui permettent, grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres c_3 et c_4.