

Baccalauréat S Antilles-Guyane 20 juin 2016

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

- A : « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B : « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

- a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
- b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,930 5.
- c. L'ampoule tirée est sans défaut.

Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a , $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx$.

- a. Montrer que $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$.
- b. Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs t et a on a

$$P_{T \geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a).$$

2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

- a. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.
- b. Calculer la probabilité $P(T \geq 5000)$.
- c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.
2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise?

EXERCICE 2**3 points****Commun à tous les candidats**

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note \mathcal{C} l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 2| = 1$.

1. Justifier que \mathcal{C} est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.
2. Soit a un nombre réel. On appelle \mathcal{D} la droite d'équation $y = ax$.
Déterminer le nombre de points d'intersection entre \mathcal{C} et \mathcal{D} en fonction des valeurs du réel a .

EXERCICE 3**7 points****Commun à tous les candidats****Partie A**

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0,

$$f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2. a. On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa dérivée.
Démontrer que pour tout réel x ,

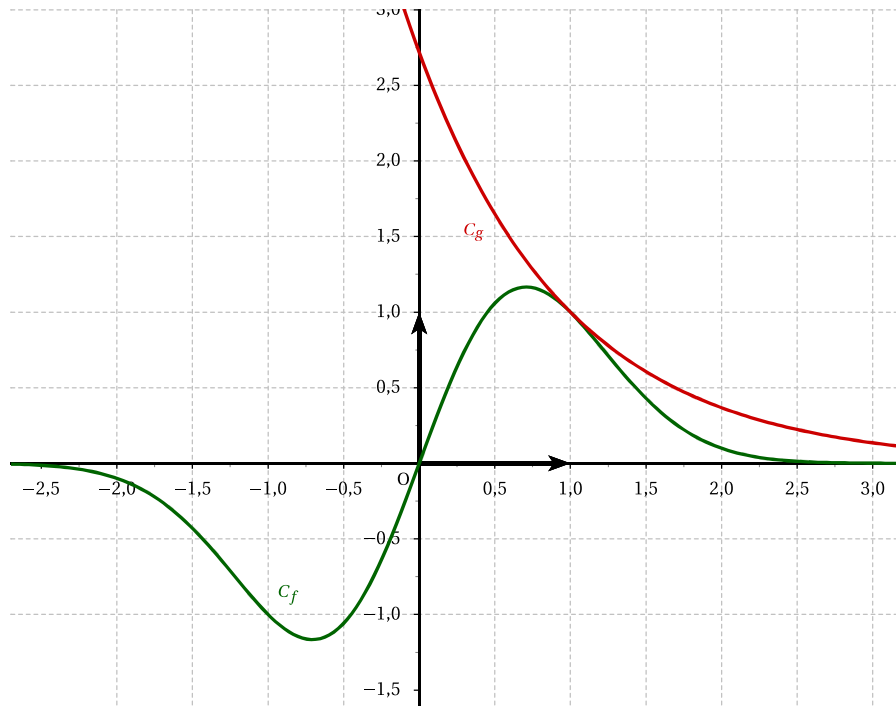
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}.$$

- b. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g respectivement des fonctions f et g .



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre?
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $] -\infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.
 - a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

- b. On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ . (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)
- c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.
4.
 - a. La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide?
 - b. Montrer que \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont un unique point commun, noté A .
 - c. Montrer qu'en ce point A , ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur \mathbb{R} .
2. En déduire la valeur de $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

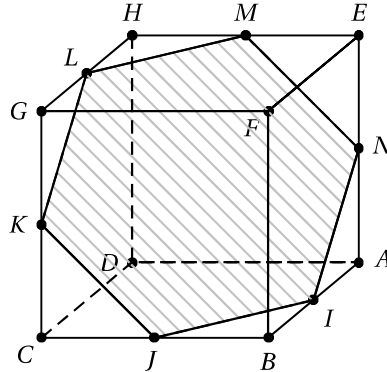
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $(D; \vec{DC}, \vec{DA}, \vec{DH})$.

Dans ce repère, on a :

$D(0; 0; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $A(0; 1; 0)$,

$H(0; 0; 1)$ et $E(0; 1; 1)$.



Soit I le milieu de $[AB]$.

Soit \mathcal{P} le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I .

On admet que la section du cube par le plan \mathcal{P} représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M , et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1. a. Montrer que le vecteur \vec{DF} est normal au plan (BGE) .
b. En déduire une équation cartésienne du plan \mathcal{P} .
2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.
3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB) .
b. En déduire que la droite (HB) et le plan \mathcal{P} sont sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.
4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1. \quad (E)$$

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x; y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

Variables :	X est un nombre entier
	Y est un nombre entier
Début :	Pour X variant de -5 à 10
	(1)
	(2)
	Alors Afficher X et Y
	Fin Si
	Fin Pour
	Fin

2. a. Donner une solution particulière de l'équation (E).
- b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
- c. Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la droite \mathcal{D} d'équation

$$7x - 3y - 1 = 0$$

On définit la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n; y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{cases}$$

1. On note M la matrice $\begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n , on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

- a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = MX_n$.
- b. Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n , X_n en fonction de M^n et X_0 .
2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de P , notée P^{-1} , est définie par $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.
 - a. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
 - b. Pour tout entier naturel n , donner D^n sans justification.
 - c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $M^n = PD^nP^{-1}$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n , $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.
En déduire que, pour tout entier naturel n , une expression de x_n et y_n en fonction de n .
4. Montrer que, pour tout entier naturel n , le point A_n appartient à la droite \mathcal{D} .