BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2019

MATHÉMATIQUES

Série ES

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 7 (ES)**

ES : ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

• *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.*
• *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
• *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
• *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Le sujet se compose de **7 pages numérotées de 1 / 7 à 7 / 7**. Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

EXERCICE 1 (5 points) Commun à tous les candidats

La partie C est indépendante des parties A et B.

Une grande enseigne décide d'organiser un jeu permettant de gagner un bon d'achat. Le jeu se déroule en deux étapes :

- **Étape 1** : chaque client tire au hasard une carte sur laquelle figure un nombre de 1 à 50, chaque numéro ayant la même probabilité d'être découvert ;
- **Étape 2** :
  - s'il découvre un numéro compris entre 1 et 15, il fait tourner une roue divisée en 10 secteurs de même taille dont 8 secteurs contiennent une étoile ;
  - sinon, il fait tourner une autre roue divisée elle aussi en 10 secteurs de même taille dont un seul secteur contient une étoile.

Un bon d'achat est gagné par le client si la roue s'arrête sur une étoile.

Partie A

Un client joue à ce jeu. On note :
N l'évènement « Le client découvre un numéro entre 1 et 15 » ;
E l'évènement « Le client obtient une étoile ».

1. **a.** Justifier que $P(N) = 0{,}3$ et que $P_N(E) = 0{,}8$.

   b. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que le client trouve un numéro entre 1 et 15 et une étoile.

3. Justifier que la probabilité que le client gagne un bon d'achat est égale à 0,31.

4. Le client a gagné un bon d'achat. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu un numéro entre 1 et 15 à la première étape ?

Partie B

Le montant d'un bon d'achat est de 10 euros.
Pour ce jeu, le directeur de l'hypermarché a prévu un budget de 250 euros par tranche de 100 clients y participant. Pour vérifier que son budget est suffisant, il simule 100 fois le jeu d'un client à l'aide d'un logiciel.
On appelle X la variable aléatoire qui, à 100 jeux simulés, associe le nombre de bons d'achat gagnés. On admet que X suit une loi binomiale.

1. Préciser les paramètres de X.

2. Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 30 clients gagnants.

3. Quel est le montant moyen de la somme totale offerte en bons d'achat ?
   Le budget prévisionnel est-il suffisant ?

Partie C

La direction de l'hypermarché étudie le temps que les clients passent dans son magasin. On admet que le temps, exprimé en minute, passé dans ce magasin par un client peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart type $\sigma = 5$.

1. Calculer la probabilité qu'un client pris au hasard dans ce magasin reste entre 30 et 60 minutes.

2. Calculer la probabilité qu'un client pris au hasard dans ce magasin reste plus de 50 minutes.

EXERCICE 2 (5 points) Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

La mairie d'une ville propose une carte jeune annuelle donnant droit à des réductions sur les activités culturelles et de loisirs. La mairie espère que dans l'avenir, au moins 70 % de la population des 12-18 ans possèdent la carte et si oui, en quelle année cela se produirait.

Ces dernières années, lors du renouvellement de la carte, on a constaté que 10 % des possesseurs de la carte ne la rachètent pas. Dans le même temps, 30 % de la population des 12-18 ans qui ne la possédaient pas l'année précédente achètent la carte. On fait l'hypothèse que l'effectif de la population des 12-18 ans est constant et que l'évolution va rester la même pour les prochaines années.
En 2018, 80 % des jeunes de 12-18 ans ne possédaient pas la carte.

On note, pour tout entier naturel n, a_n la part de la population des 12-18 ans de la ville possédant la carte l'année $2018+n$, et b_n la part de la population des 12-18 ans ne la possédant pas.

Partie A

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B où le sommet A représente l'état « posséder une carte jeune » et B l'état « ne pas posséder une carte jeune ».
2. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre A puis B des sommets.
3. **a.** Vérifier que $a_2 = 0{,}552$ et $b_2 = 0{,}448$.
   b. Interpéter le coefficient 0,552 dans le contexte de l'énoncé.
4. On note a et b les coefficients de la matrice P correspondant à l'état stable de ce graphe.
   a. Montrer que les nombres a et b sont solutions du système $\begin{cases} -0,1a+0,3b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$.
   b. Justifier que la mairie peut espérer qu'à l'avenir au moins 70 % de la population des 12-18 ans possèdent la carte.

Partie B
On admet que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}6\ a_n + 0{,}3$ et que la suite (a_n) est croissante.

1. On donne l'algorithme suivant dans lequel A est un nombre réel et N est un entier naturel.

```
A ⟵ 0,2
N ⟵ 0
Tant que ...... faire
    A prend la valeur ......
    N prend la valeur ......
Fin Tant Que
```

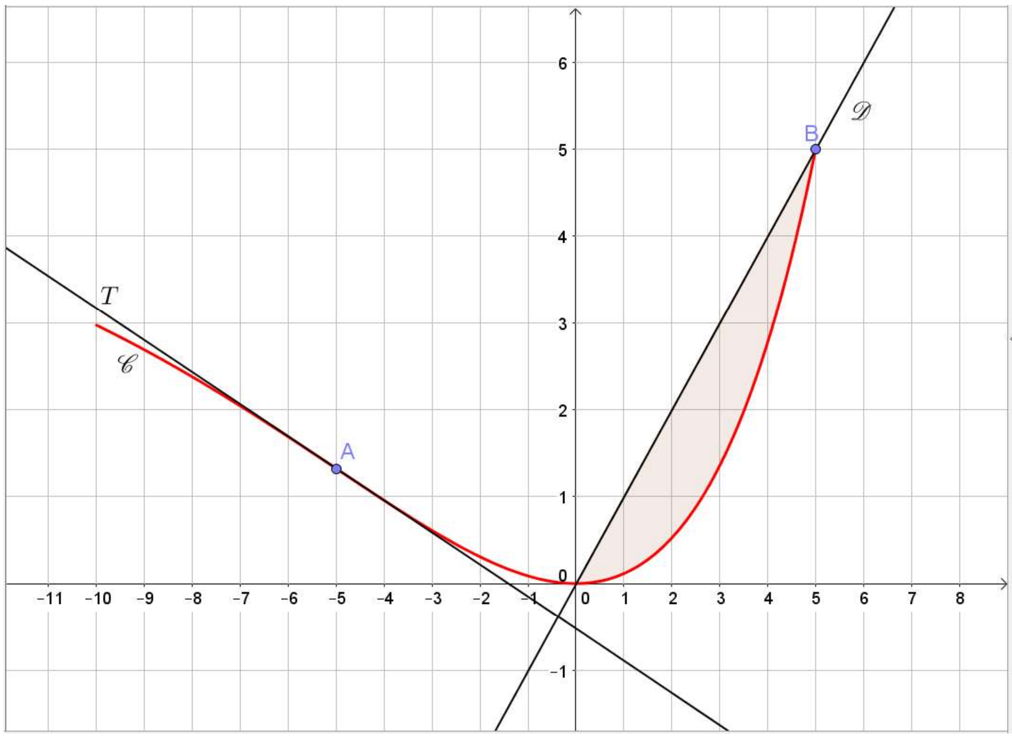
   Recopier puis compléter les pointillés des lignes 3 à 5 de l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche le nombre d'années nécessaires à la mairie pour atteindre son objectif qu'au moins 70 % de la population des 12-18 ans possèdent la carte.

2. En quelle année l'objectif sera-t-il atteint ?

EXERCICE 3 (7 points) Commun à tous les candidats

Dans la figure ci-dessous sont représentés dans un repère orthogonal :

- la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10 ; 5]$;
- la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -5 ;
- la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$;
- le domaine S situé entre la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$, grisé sur la figure.



Partie A

Dans cette partie les estimations seront obtenues par lecture graphique.

Cette partie A est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. Parmi les quatre valeurs ci-dessous, la meilleure valeur approchée du coefficient directeur de la tangente T est :

a. $-\dfrac{1}{3}$ **b.** -3

c. 3 **d.** $\dfrac{1}{3}$

2. La fonction f semble :

a. concave sur $[-5 ; 0]$ **b.** concave sur $[-10 ; 0]$

c. convexe sur $[-10 ; 5]$ **d.** convexe sur $[-5 ; 5]$

3. L'aire du domaine S, en unité d'aire, appartient à l'intervalle :

a. $[-4\ ;\ -2]$	**b.** $[4\ ;\ 7]$
c. $[0\ ;\ 3]$	**d.** $[7\ ;\ 10]$

Partie B

La fonction f précédente, définie et dérivable sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5\ ]$, a pour expression $f(x) = (x-5)\mathrm{e}^{0,2x} + 5$.

1. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5\ ]$.

   a. Montrer que $f'(x) = 0,2x\mathrm{e}^{0,2x}$.

   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5\ ]$.

   c. Déterminer la valeur exacte du coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -5.

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	$g(x) = 0.2x * \exp(0.2x)$ $\rightarrow \quad g(x) = \frac{1}{5}\ x\ \mathrm{e}^{\frac{1}{5}x}$
2	Dérivée $\quad g'(x) = \frac{1}{25}\ x\ \mathrm{e}^{\frac{1}{5}x} + \frac{1}{5}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{5}x}$

   a. En utilisant ces résultats, justifier que la dérivée seconde de f, notée f'', est définie par $f''(x) = (0,2+0,04x)\mathrm{e}^{0,2x}$.

   b. Étudier la convexité de la fontion f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5\ ]$.

3. On admet qu'une primitive de f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5\ ]$ est la fonction F définie par $F(x) = (5x-50)\mathrm{e}^{0,2x} + 5x$.

   a. Déterminer la valeur exacte de I définie par $I = \displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   b. Montrer que l'aire du domaine du plan situé sous la droite $\mathscr{D}$, au-dessus de l'axe des abscisses et limité par la droite d'équation $x = 5$ vaut 12,5 unités d'aire.

   c. En déduire une valeur approchée de l'aire du domaine S en unité d'aire.

EXERCICE 4 (3 points) Commun à tous les candidats

Afin de respecter l'accord signé sur la pollution de l'air, certaines entreprises, dès l'année 2014, ont été contraintes de diminuer chaque année la quantité de CO_2 qu'elles produisent. Une de ces entreprises émettait 15 milliers de tonnes de CO_2 en 2014 et 14,7 milliers de tonnes en 2015.
On suppose que le taux de diminution annuel de CO_2 émis restera constant pendant les années suivantes.

1. Calculer le taux d'évolution de l'émission de CO_2 par cette entreprise entre 2014 et 2015.

2. L'accord prévoit que cette entreprise devra produire moins de 12 milliers de tonnes de CO_2 par an. En détaillant la méthode employée, déterminer à partir de quelle année la quantité de CO_2 émise par cette entreprise passera en dessous de ce seuil de 12 milliers de tonnes.