B A C C A L A U R É A T G É N É R A L

SESSION 2019

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures Coefficient : 4

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

Exercice 1 (4 points) : commun à tous les candidats

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, recopier sur la copie le numéro de la question et indiquer la réponse choisie.

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ d'expression

$$f(x) = -1{,}5\,x^2 + x^2 \ln(x) .$$

La fonction dérivée de f est donnée pour tout x de $]0 ; +\infty[$ par :

a. $f'(x) = -x + \dfrac{1}{x}$

b. $f'(x) = 2\,x\ln(x) - 2\,x$

c. $f'(x) = -3\,x + 2$

d. $f'(x) = -x\ln(x) - 0{,}5\,x$

2. Entre 2006 et 2018, dans un restaurant universitaire, le prix d'un repas est passé de 2 euros à 3,5 euros en augmentant chaque année de x %. Parmi ces valeurs, la valeur la plus proche de x est :

a. 6,25 **b.** 4,77 **c.** 14,58 **d.** 0,85

3. Un adolescent joue à un jeu dont les parties successives sont indépendantes.

À chaque partie, il a une chance sur 25 de sortir vainqueur. Après 13 parties, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait gagné au moins une fois est :

a. 0,588 **b.** 0,412 **c.** 0,025 **d.** 0,975

4. On considère une fonction g définie sur **R**, dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ est donnée ci-contre.

La fonction g admet une primitive sur **R** notée G.

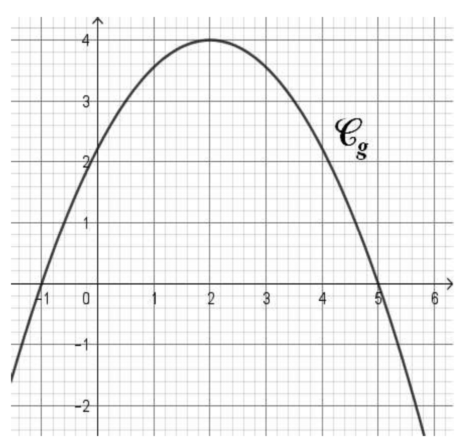
La fonction G est :

a. convexe sur l'intervalle $[-1 ; 5]$.

b. concave sur l'intervalle $[-1 ; 5]$.

c. croissante sur l'intervalle $[2 ; 5]$.

d. décroissante sur l'intervalle $[2 ; 5]$



Exercice 2 (5 points) : commun à tous les candidats

Les parties sont indépendantes.

Une entreprise vend des téléviseurs.

Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E et p(E) sa probabilité. Pour tout évènement F de probabilité non nulle, on note $p_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

Partie A

Une étude a montré que ces téléviseurs peuvent rencontrer deux types de défauts : un défaut sur la dalle, un défaut sur le condensateur.

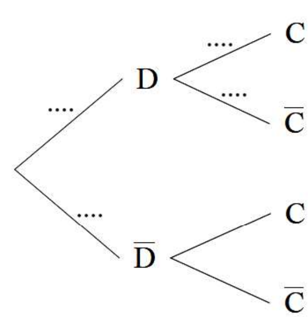
L'étude indique que :

- 3 % des téléviseurs présentent un défaut sur la dalle et parmi ceux-ci 2 % ont aussi un défaut sur le condensateur.
- 5 % des téléviseurs ont un défaut sur le condensateur.

On choisit au hasard un téléviseur et on considère les évènements suivants :

- D : « le téléviseur a un défaut sur la dalle »
- C : « le téléviseur a un défaut sur le condensateur ».

1. **Les résultats seront approchés si nécessaire à 10^{-4} près.**
   - **a.** Exprimer les trois données numériques de l'énoncé sous forme de probabilités.
   - **b.** Recopier l'arbre ci-dessous et **compléter uniquement les pointillés** par les probabilités associées :



   - **c.** Calculer la probabilité p(D∩C) de l'événement D∩C.
   - **d.** Le téléviseur choisi a un défaut sur le condensateur. Quelle est alors la probabilité qu'il ait un défaut sur la dalle ?
   - **e.** La probabilité que le téléviseur choisi ait un défaut sur le condensateur mais pas de défaut sur la dalle vaut 0,0494. Justifier cette affirmation.

2. **Les résultats seront approchés à 10^{-2} près.**

On note T la variable aléatoire qui, à chaque téléviseur prélevé, associe le temps **exprimé en mois** avant la première panne. On admet que T suit la loi normale d'espérance $\mu = 84$ et d'écart type $\sigma = 6$.

   a. Donner la probabilité qu'un téléviseur tombe en panne pour la première fois après 72 mois d'utilisation.

   b. Quelle est la probabilité que la première panne arrive entre 6 années et 8 années d'utilisation.

   c. Le téléviseur n'a pas eu de panne après 6 années d'utilisation. Quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 8 années d'utilisation ?

Partie B

Afin de satisfaire davantage de clients, l'entreprise décide d'apporter des améliorations à son service d'assistance. Après quelques mois de mise en place du nouveau service, elle affirme que 90 % des clients sont maintenant satisfaits. Un service de contrôle indépendant veut vérifier cette affirmation. Pour cela il interroge au hasard 300 clients. Parmi eux, 265 affirment être satisfaits.

Les résultats de cette étude remettent-ils en cause l'affirmation de l'entreprise ? Justifier la réponse.

Exercice 3 (5 points) : candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Sur un site de vente en ligne, Antoine a commandé une machine à café à capsules.

1. Chaque capsule achetée à l'unité coûte 0,60 €. Une offre permet d'acquérir 150 capsules au prix de 60 €.

   De quel pourcentage de réduction bénéficie-t-on grâce à l'offre par rapport à un achat à l'unité ?

2. Au 1^{er} janvier 2017, on comptait 60 000 utilisateurs de cette machine à café. On estime que chaque mois, 10 % des propriétaires cessent de l'utiliser mais on compte 24 000 nouveaux utilisateurs.

   a. Expliquer pourquoi le nombre d'utilisateurs de cette machine à café n mois après le 1^{er} janvier 2017, peut être modélisé par la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 60\ 000 \text{ et } u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 24\,000 .$$

b. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par : $v_n = u_n - 240\,000$.

Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3.

a. *n* étant un entier naturel, exprimer v_n en fonction de *n*.

b. En déduire que pour tout entier naturel *n*, $u_n = 240000 - 180\,000 \times 0{,}9^n$.

4. Au bout de combien de mois le nombre d'utilisateurs de cette machine à café dépassera-t-il pour la première fois 230 000 ?

5. L'entreprise qui fabrique cette machine à café prétend qu'elle touchera un certain mois plus de 250 000 utilisateurs. Que penser de cette affirmation ?

Exercice 4 (6 points) : commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Une entreprise produit chaque année entre 100 et 900 pneus pour tracteurs.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 9] par $f(x) = 0{,}5x^2 - 7x + 14 + 6\ln(x)$.

On admet que la fonction f modélise le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu, exprimé en centaines d'euros, pour *x* centaines de pneus produits.

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle [1 ; 9] et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que pour tout réel *x* de l'intervalle [1 ; 9] on a : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x}$.

2.

a. Justifier les variations suivantes de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 9] :

x	1		6		9
Variations de f		↘		↗	

b. Justifier que, sur l'intervalle [1 ; 9], l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α.

c. Donner un encadrement au centième près de α.

d. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
X ← 1
Y← 7,5
Tantque Y > 5
        X ← X+0,01
        Y ← 0,5X² – 7X + 14 + 6*ln(X)
Fin Tantque
```

À la fin de l'exécution de l'algorithme, quelle valeur numérique contient la variable X ?

3. Pour quelle quantité de pneus, le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu est-il minimal ? À combien s'élève-t-il ?

Partie B

Cette même entreprise envisage la fabrication de semoirs (gros matériel agricole).

On admet que la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 100] par $g(x) = 2x - 1 + e^{0,05x}$ modélise le coût de fabrication, exprimé en centaines d'euros, de x semoirs.

1. Donner une primitive G de la fonction g sur l'intervalle [0 ; 100].

2. Calculer la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle [0 ; 100].

3. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.