B A C C A L A U R É A T G É N É R A L

SESSION 2019

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **5**

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **4**

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7,
dont l'annexe 1 et l'annexe 2 page 7/7 sont à rendre avec la copie.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats

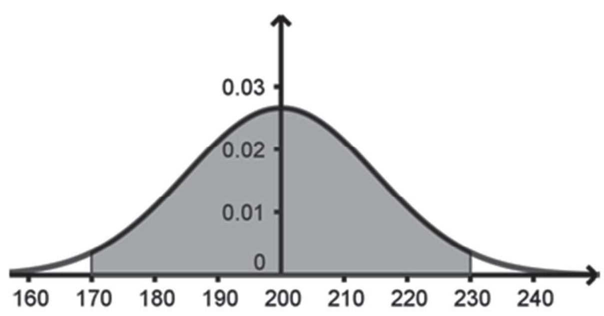
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question comporte quatre réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Recopier pour chaque question son numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour tout événement E, on note $p(E)$ sa probabilité.

1. Soit X la variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(20\ ;\ 0{,}4)$.
   a) $p(X = 7) = 20 \times 0{,}4^7$
   b) $p(X > 4) = 0{,}98$ arrondie au centième
   c) $p(X \leq 4) = 0{,}05$ arrondie au centième
   d) $p(X \leq 7) = 0{,}25$ arrondie au centième

2. L'équation $(\mathrm{e}^x)^2 = 3\mathrm{e}^x$ possède :
   a) une unique solution 3
   b) une unique solution $\ln(3)$
   c) deux solutions 0 et $\ln(3)$
   d) deux solutions 0 et 3

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x}$.
   Une autre expression de $f(x)$ est :
   a) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{-x}$
   b) $f(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$
   c) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$
   d) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$

4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale dont la densité de probabilité est représentée ci-contre. Sur le graphique, la surface grisée correspond à une probabilité de 0,95.



   Une valeur approchée à 0,1 près du nombre a tel que $p(X \geq a) = 0{,}1$ est :
   a) $a \approx 180{,}8$
   b) $a \approx 212{,}6$
   c) $a \approx 219{,}2$
   d) $a \approx 238{,}4$

Exercice 2 (6 points)
Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C sont indépendantes.
Si nécessaire, les résultats seront arrondis au centième.

Partie A

Un club de football est composé d'équipes adultes masculines, adultes féminines et d'équipes d'enfants. Chaque week-end, la présidente Claire assiste au match d'une seule des équipes du club et elle suit :

- dans 10 % des cas, le match d'une équipe adulte féminine ;
- dans 40 % des cas, le match d'une équipe adulte masculine ;
- dans les autres cas, le match d'une équipe d'enfants.

Lorsqu'elle assiste au match d'une équipe masculine, la probabilité que celle-ci gagne est 0,6. Lorsqu'elle assiste au match d'une équipe d'enfants, la probabilité que celle-ci gagne est 0,54.
La probabilité que Claire voie l'équipe de son club gagner est 0,58.
On choisit un week-end au hasard. On note les événements suivants :

- *F* : « Claire assiste au match d'une équipe adulte féminine »
- *M* : « Claire assiste au match d'une équipe adulte masculine »
- *E* : « Claire assiste au match d'une équipe d'enfants »
- *G* : « l'équipe du club de Claire gagne le match »

Pour tous événements A et B, on note $\bar{A}$ l'événement contraire de A, $p(A)$ la probabilité de A et, si B est de probabilité non nulle, $p_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

1. L'arbre de probabilité est donné en **annexe 1**. Le compléter au fur et à mesure de l'exercice.
2. Déterminer la probabilité $p(M \cap G)$.
3. a) Démontrer que $p(F \cap G) = 0{,}07$.
   b) En déduire $p_F(G)$.
   c) La probabilité que l'équipe adulte féminine gagne un match est 0,47. La présence de Claire semble-t-elle favoriser la victoire de l'équipe adulte féminine ?
4. Claire annonce avoir assisté à la victoire d'une équipe du club. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi le match d'une équipe adulte féminine ?

Partie B

Au guichet, un supporter attend pour acheter son billet. On modélise le temps d'attente en minute par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart type $\sigma = 10$.

1. En moyenne, combien de temps attend ce supporter au guichet ?
2. Déterminer $p(25 \leq X \leq 35)$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. Le supporter ne dispose que de 15 minutes avant le début du match pour acheter son billet.
   Quelle est la probabilité qu'il puisse acheter son billet avant le début du match ?

Partie C

Des études statistiques ont montré que la probabilité qu'un enfant se réinscrive d'une année sur l'autre dans le même club de football est 0,6.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion d'enfants se réinscrivant d'une année sur l'autre pour un échantillon de 75 enfants pris au hasard dans le même club de football.
2. 52 des 75 enfants du club de Claire veulent se réinscrire en septembre 2018.
   La victoire de la France aux championnats du monde en 2018 a-t-elle eu un effet sur les réinscriptions en septembre 2018 dans ce club ? Justifier.

Exercice 3 (5 points)
Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité ou candidats de L

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Tous les ans, au mois de septembre, Richard prélève 8,5 tonnes d'algues sur les plages de sa commune.
Au 1er septembre 2018, il y avait 230 tonnes d'algues sur ces plages.
Tous les ans, entre le 1er octobre et le 1er septembre suivant, la quantité d'algues sur ces plages augmente de 4 %.
On note u_n la quantité en tonnes d'algues présente sur les plages au 1er septembre de l'année 2018 + n. Ainsi, $u_0 = 230$.

1. Vérifier par le calcul que Richard disposera de 230,36 tonnes sur les plages au 1er septembre 2019.
   On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}04u_n - 8{,}84$.
2. Soit (v_n) la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 221$.
   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,04.
      Préciser son premier terme.
   b) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 221 + 9 \times 1{,}04^n$.
3. La quantité d'algues présentes sur ces plages dépassera-t-elle un jour 250 tonnes ? Si oui, préciser au bout de combien d'années cette quantité sera atteinte.

Partie B

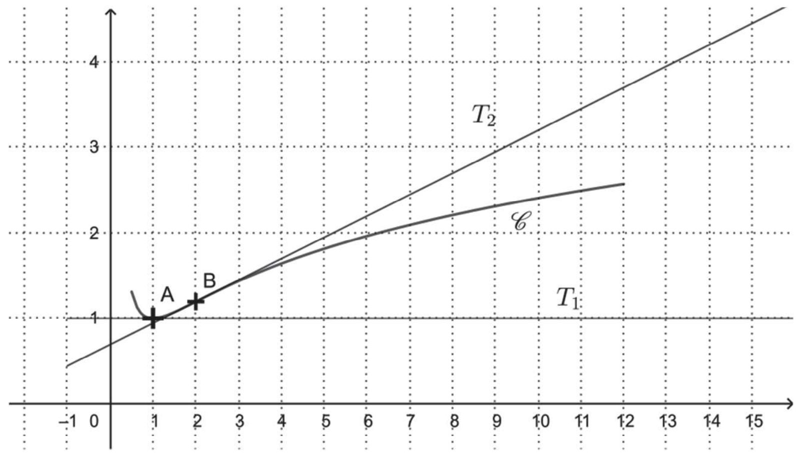
Pour développer son entreprise, à partir du 1er septembre 2019, Richard a besoin de 10 % d'algues de plus que l'année précédente.
On rappelle qu'au 1er septembre 2018, il disposait de 230 tonnes d'algues et qu'il en avait consommé 8,5 tonnes en septembre 2018. Dans cette nouvelle situation, il disposera de 230,36 tonnes d'algues au 1er septembre 2019 et en utilisera 9,35 tonnes pendant ce mois.
Richard souhaite étudier la quantité d'algues sur les plages concernées pour les 16 prochaines années selon ce modèle.
Pour cela, il rédige l'algorithme ci-contre.

1. Que représentent les variables A et B de l'algorithme ?
2. Dans le tableau en **annexe 2**, on a obtenu différentes valeurs de A et B de l'algorithme. Compléter les lignes du tableau pour les valeurs de K = 1 et K = 2. Arrondir les résultats au centième.
3. Que peut conclure Richard pour 2034 ?

```
A ← 230
B ← 8,5
Pour K allant de 1 à 16
    A ← (A – B) × 1,04
    B ← B × 1,1
Fin pour
```

Exercice 4 (5 points)
Commun à tous les candidats

On a représenté ci-contre la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[0{,}5\,;12]$, la tangente T_1 à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1 et la tangente T_2 à $\mathcal{C}$ au point B d'abscisse 2. La tangente T_1 est parallèle à l'axe des abscisses.
La tangente T_2 traverse la courbe $\mathcal{C}$ en B. On note f' la fonction dérivée de f.



1. Par lecture graphique :
   a) Déterminer $f'(1)$.
   b) Déterminer les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}$.
   c) Déterminer un encadrement de $\int_6^8 f(x)\mathrm{d}x$ par deux entiers consécutifs.
2. On admet que la fonction f est définie sur $[0{,}5\,;12]$ par : $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$.

   a) Vérifier que, pour tout $x \in [0{,}5\,;12]$, $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

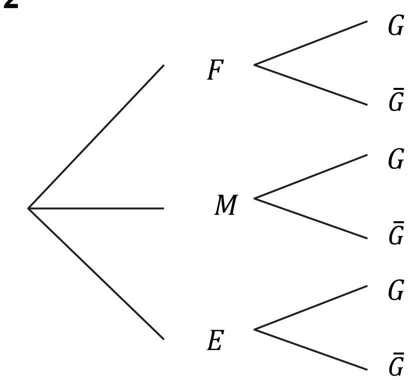
   b) Déterminer le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.
   Si nécessaire, on arrondira à 0,1 les valeurs numériques.
3. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants que l'on pourra admettre.

Calcul formel	
1	$g(x)$:=(x – 1)/x² $g(x) \coloneqq \dfrac{x-1}{x^2}$
2	Dérivée ($g(x)$) $\dfrac{x^2-2x(x-1)}{x^4}$
3	Simplifier(Dérivée($g(x)$)) $\dfrac{-x+2}{x^3}$

   Déterminer par le calcul le plus grand intervalle sur lequel f est concave.
4. Soit F la fonction définie sur $[0{,}5\,;12]$ par $F(x) = (x+1)\ln(x) - x$.
   a) Vérifier que F est une primitive de f sur $[0{,}5\,;12]$.
   b) En déduire la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[6\,;8]$.

Annexes à rendre avec la copie

Annexe 1
Exercice 2



Annexe 2
Exercice 3
Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité ou candidats de L
Valeurs de *A* et *B* obtenues à l'aide d'un tableur

K	*A*	*B*
	230	8,5
1		
2		
3	228,35	11,31
4	225,72	12,44
5	221,80	13,69
6	216,44	15,06
7	209,43	16,56
8	200,58	18,22
9	189,66	20,04
10	176,40	22,05
11	160,53	24,25
12	141,73	26,68
13	119,65	29,34
14	93,92	32,28
15	64,11	35,51
16	29,75	39,06