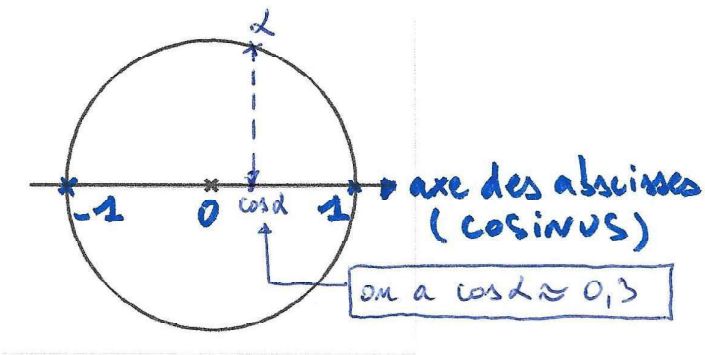
Le cosinus d'un angle : définition , premières propriétés

La définition du cosinus

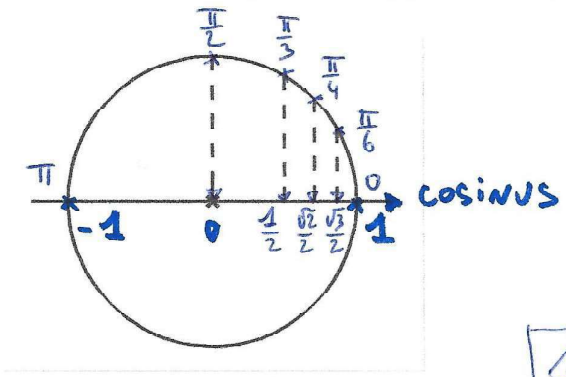
Dans le *cercle trigonométrique* , le *cosinus d'un angle* correspond à l'*abscisse* du point correspondant.
Ce *cosinus* sera donc bien *un nombre réel*, compris entre – 1 et 1, qui se lira sur l'*axe des abscisses*.



On peut vérifier que, pour tout angle α, on a : $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

Les valeurs à connaitre par coeur

Ces valeurs sont à bien mémoriser ! Elles vous serviront jusqu'au Bac (et même après, pour certains ..).



Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

⚠ on a $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$

Premières propriétés

. Le *cosinus* est 2 π périodique.

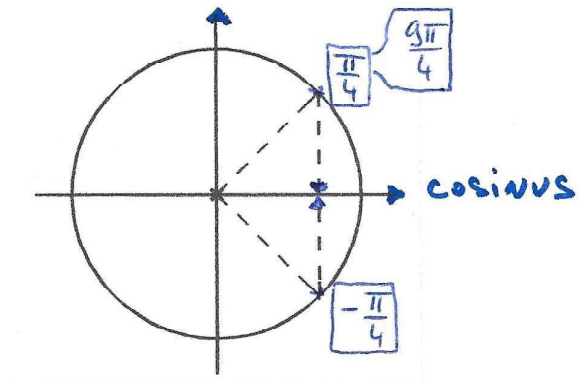
En tournant de 2 π sur le cercle, on revient sur le même point et donc le cosinus reste le même.

pour tout angle α, on a : $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$

. Un angle quelconque et son angle opposé ont la même valeur du *cosinus*.

Que l'on parte dans le sens positif (vers le haut) ou négatif (vers le bas), l'abscisse du point est la même.

pour tout angle α, on a : $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$



On a :

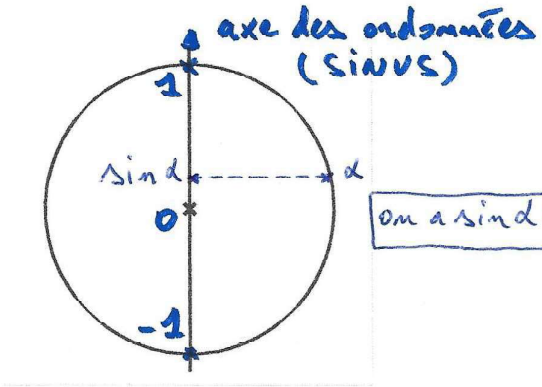
$\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Le sinus d'un angle : définition , premières propriétés

La définition du sinus

Dans le *cercle trigonométrique* , le *sinus d'un angle* correspond à l'*ordonnée* du point correspondant.
Ce *sinus* sera donc bien *un nombre réel*, compris entre – 1 et 1, que l'on lira sur l'*axe des ordonnées*.

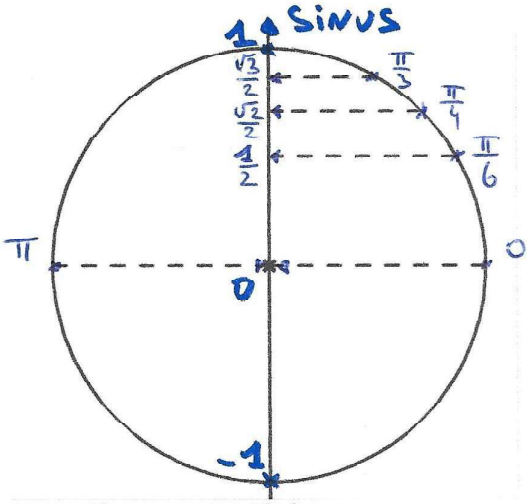


on a $\sin\alpha \approx 0{,}2$

On peut vérifier que, pour tout angle α, on a : $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

Les valeurs à connaitre par coeur

Ces valeurs sont à bien mémoriser ! Elles vous serviront jusqu'au Bac (et même après, pour certains ..).



Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

⚠ on a $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$

Premières propriétés

. Le *sinus* est 2 π périodique.

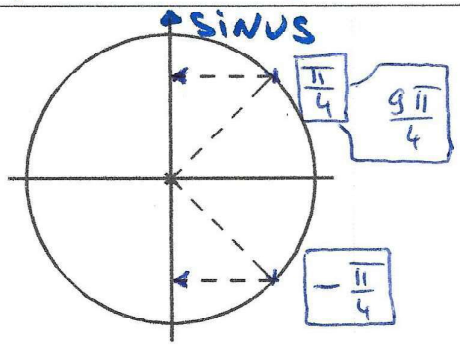
En tournant de 2 π sur le cercle, on revient sur le même point et donc le sinus reste le même.

pour tout angle α, on a : $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$

. Un angle quelconque et son angle opposé ont des valeurs opposées du *sinus*.

En partant dans le sens positif, le sinus est positif ; en partant dans le sens négatif, le sinus est négatif.

pour tout angle α, on a : $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$



On a :

$\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

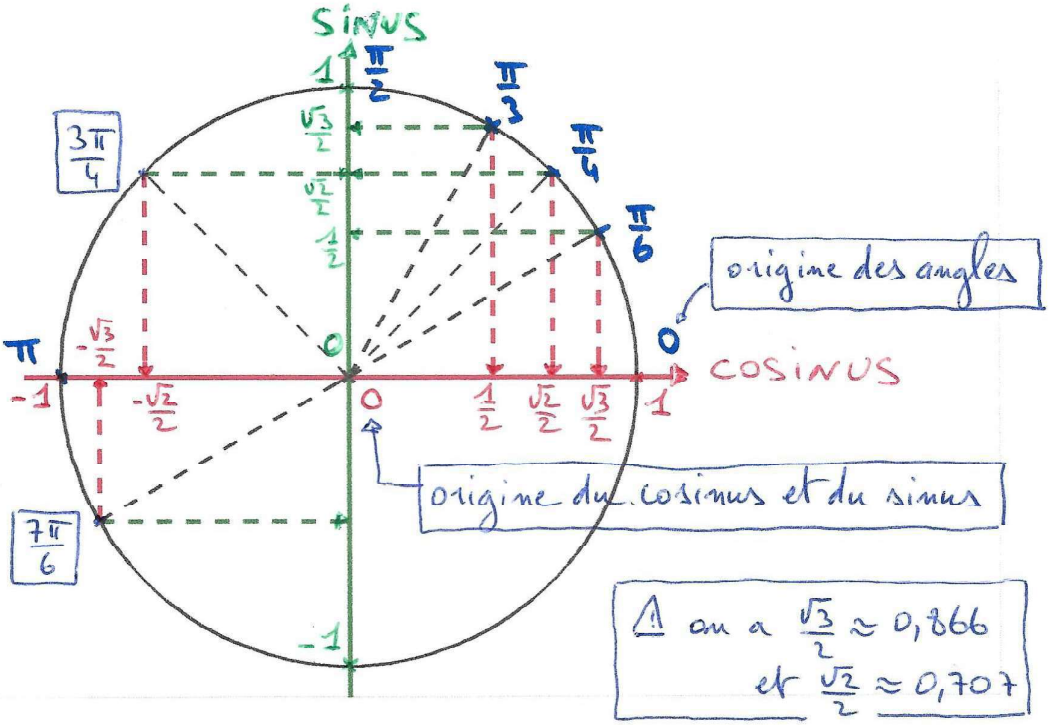
et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Le cosinus, le sinus et les angles sur un même cercle

Cette fiche va nous permettre de ***visualiser*** sur un même cercle trigonométrique les "trois graduations":

- la graduation des *angles* (en *noir*) qui fait le tour du cercle.
- la graduation du *cosinus* (en *rouge*) qui correspond à l'axe des abscisses.
- la graduation du *sinus* (en *vert*) qui correspond à l'axe des ordonnées.

Attention !! Il faut surtout ne pas confondre le "zéro" des angles et le "zéro" du cosinus ou du sinus.



⚠ on a $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$

Angle (en degré)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Angle (en radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cosinus (de l'angle)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus (de l'angle)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Remarques :

. On peut observer une certaine "inversion" dans ce tableau entre les valeurs du *cosinus* et du *sinus*.

. Une fois ces valeurs bien apprises, on en déduira d'autres, pour des angles tout autour du cercle, en utilisant des propriétés de symétrie par rapport aux axes.

Par exemple : $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

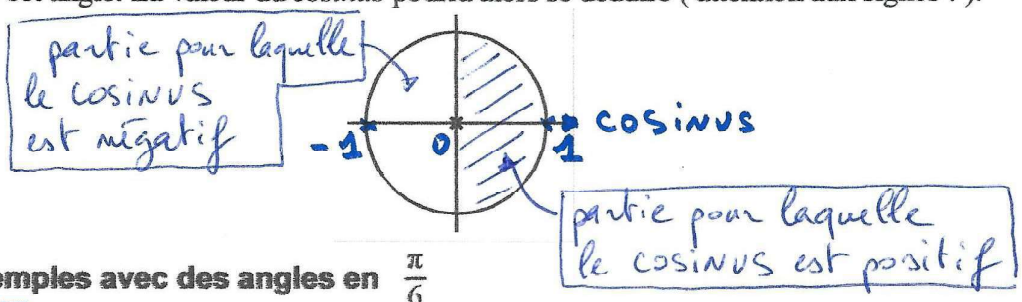
$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

Comment trouver la valeur du cosinus d'un angle

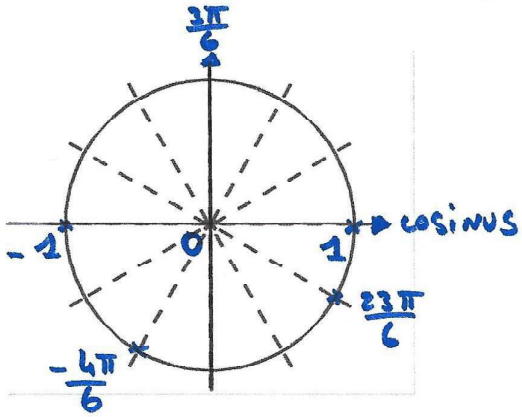
Méthode générale

Il faudra déjà connaitre ***par coeur*** les valeurs de *cosinus* pour les angles 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$.

Ensuite, suivant l'angle étudié, on fera le partage du cercle (associé à cet angle) et on placera alors le point correspondant à cet angle. La valeur du *cosinus* pourra alors se déduire (attention aux signes !).



Quelques exemples avec des angles en $\frac{\pi}{6}$



En partageant le cercle en $\frac{\pi}{6}$, on se souviendra qu'un tour complet correspond à $12 \times \frac{\pi}{6}$ soit $\frac{12\pi}{6}$.

Petit aide mémoire

Les valeurs $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ne s'obtiennent qu'avec des angles en $\frac{\pi}{4}$.
Impossible d'avoir $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ avec des angles en $\frac{\pi}{6}$ ou en $\frac{\pi}{3}$.

On a : $\cos\left(-\frac{4\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ (voir dessin)

→ on a compté $4 \times \frac{\pi}{6}$, en allant dans le sens négatif.

On a : $\cos\left(\frac{23\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (voir dessin)

→ avec un tour, on est à $\frac{12\pi}{6}$ et il reste $11 \times \frac{\pi}{6}$ à compter.

On a : $\cos\left(\frac{135\pi}{6}\right) = 0$ (voir dessin)

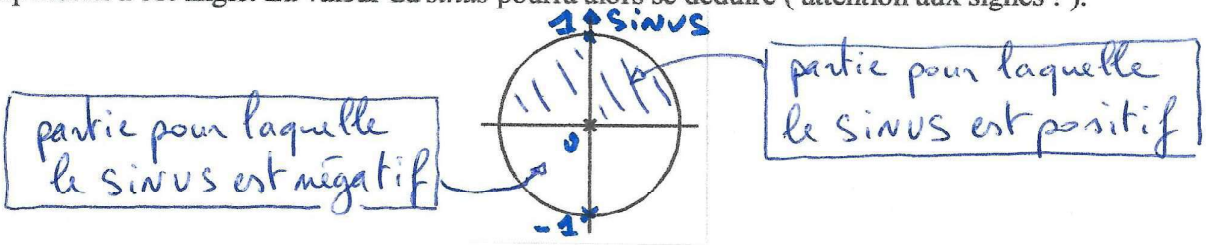
→ la mesure principale de $\frac{135\pi}{6}$ est $\frac{3\pi}{6}$ (soit $\frac{\pi}{2}$).
En effet, après 11 tours, on est à $11 \times \frac{12\pi}{6} = \frac{132\pi}{6}$ et il reste $3 \times \frac{\pi}{6}$ à compter.

Comment trouver la valeur du sinus d'un angle

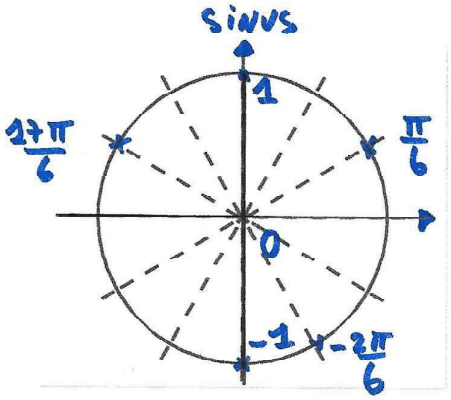
Méthode générale

Il faudra déjà connaitre ***par coeur*** les valeurs de *sinus* pour les angles 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$.

Ensuite, suivant l'angle étudié, on fera le partage du cercle (associé à cet angle) et on placera alors le point correspondant à cet angle. La valeur du *sinus* pourra alors se déduire (attention aux signes !).



Quelques exemples avec des angles en $\frac{\pi}{6}$



En partageant le cercle en $\frac{\pi}{6}$, on se souviendra qu'un tour complet correspond à $12 \times \frac{\pi}{6}$ soit $\frac{12\pi}{6}$.

Aide mémoire :

Les valeurs $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ne s'obtiennent qu'avec des angles en $\frac{\pi}{4}$.
Impossible d'avoir $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ avec des angles en $\frac{\pi}{6}$ ou en $\frac{\pi}{3}$.

On a : $\sin\left(-\frac{2\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (voir dessin)

→ on a compté $2 \times \frac{\pi}{6}$, en allant dans le sens négatif.

On a : $\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ (voir dessin)

→ avec un tour, on est à $\frac{12\pi}{6}$ et il reste $5 \times \frac{\pi}{6}$ à compter.

On a : $\sin\left(\frac{157\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ (voir dessin)

→ la mesure principale de $\frac{157\pi}{6}$ est $\frac{\pi}{6}$.
En effet, après 13 tours, on est à $13 \times \frac{12\pi}{6} = \frac{156\pi}{6}$ et il reste $\frac{\pi}{6}$ à ajouter.

Comment résoudre une équation trigonométrique : savoir retrouver un angle

Principe de base

Résoudre une *équation trigonométrique* , cela signifie qu'il faudra ***retrouver les valeurs d'angles*** (dans un certain intervalle) pour une valeur donnée du cosinus (ou du sinus).

Exemple : résoudre " $\cos x = -\frac{1}{2}$ sur $]-\pi ; \pi]$ " est une équation trigonométrique.

Quelques règles pratiques à respecter et à apprendre

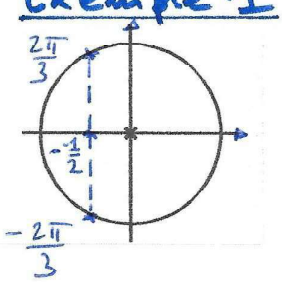
Pour résoudre ces équations, ne pas compter que sur le "talent", il y a du "***par coeur***" à mettre en place.

- Pour obtenir $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, l'angle ne peut être qu'en $\frac{\pi}{4}$.
- Pour obtenir $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$ ou $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, l'angle ne peut être qu'en $\frac{\pi}{3}$ ou en $\frac{\pi}{6}$.
- Pour obtenir 0 ou 1 ou -1, l'angle ne peut être qu'en $\frac{\pi}{2}$ ou en π ou égal à 0 !

Exemples de résolutions sur l'intervalle des mesures principales $]-\pi ; \pi]$

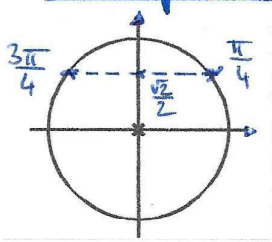
Comme pour tout le travail en trigonométrie cette année, il faudra faire un cercle trigo pour chaque résolution (*il faudra savoir les faire rapidement, à la main*), afin de visualiser les situations proposées.

Exemple 1 : Résoudre $\cos x = -\frac{1}{2}$ sur $]-\pi ; \pi]$.



Les solutions sont $\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

Exemple 2 : Résoudre $\sqrt{2} \sin x = 1$ sur $]-\pi ; \pi]$.



→ on obtient $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Les solutions sont $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

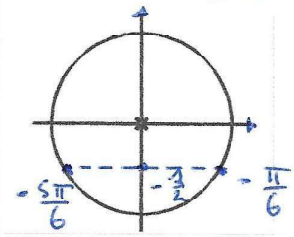
Comment résoudre une équation trigonométrique : des exemples

Le travail de base pour retrouver les angles sera toujours le même, mais parfois l'énoncé propose une résolution dans un autre intervalle que $]-\pi\ ;\ \pi]$. Il faudra juste bien faire attention de donner l'ensemble de toutes les solutions comprises dans l'intervalle proposé.

Exemples de résolution sur $\mathbb{R}$

Une fois que l'on a trouvé les mesures principales, il faudra penser à ajouter $2k\pi$ à chaque solution. Cela représente, au final, une infinité de solutions car on tiendra compte de l'ensemble des angles obtenus en faisant des tours complets autour du cercle trigonométrique (dans le sens positif ou négatif).

Résoudre $\sin x = -\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$.



Les solutions sont $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

avec k, entier relatif, qui peut prendre comme valeur $0\ ;\ 1\ ;\ -1\ ;\ 2\ ;\ -2$ ...etc...

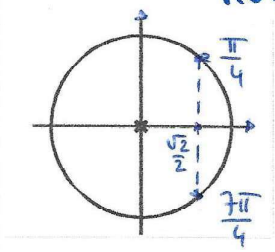
On obtient donc comme solutions :

pour $k=0$	pour $k=-1$	pour $k=1$	pour $k=-2$	
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{13\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{25\pi}{6}$	...etc...
$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{17\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{19\pi}{6}$	

Exemples de résolution sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 2\pi\ ]$

Il n'y aura ici ***aucune solution négative***. On ne donnera que des angles positifs qui seront entre 0 et 2π.

Résoudre $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\ ;\ 2\pi]$.



Les solutions sont $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$

⚠ La réponse $-\frac{\pi}{4}$, qui est une mesure principale, correspond à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ et non pas à $[0\ ;\ 2\pi]$.

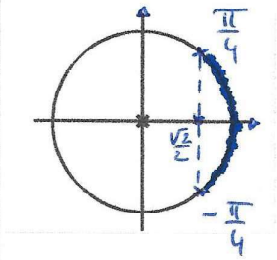
Comment résoudre une inéquation trigonométrique : la méthode

Résoudre une *inéquation trigonométrique* revient tout à d'abord à résoudre l'*équation* correspondante.
Ensuite, en plaçant les points correspondants sur le cercle trigonométrique, on va "hachurer" ou "surligner" les angles qui correspondent à l'inégalité souhaitée.
Et on conclut en donnant les intervalles solutions , en surveillant bien d'être dans l'intervalle de départ, donné initialement par la consigne.

Exemple de résolution sur l'intervalle des mesures principales] - π ; π]

On résout l'inéquation $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $]-\pi ; \pi]$

→ on commence avec l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dont les solutions dans $]-\pi ; \pi]$ sont :



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

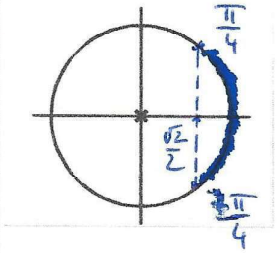
D'après la partie "surlignée", on constate que les solutions de l'inéquation sur $]-\pi ; \pi]$ sont :

$$S = \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$$

Exemple de résolution sur l'intervalle [0 ; 2π]

On résout l'inéquation $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0 ; 2\pi]$

→ on commence avec l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dont les solutions dans $[0 ; 2\pi]$ sont :



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$ (plutôt que $-\frac{\pi}{4}$ ici !)

D'après la partie "surlignée", on constate que les solutions de l'inéquation sur $[0 ; 2\pi]$ sont dans deux intervalles disjoints :

$$S = \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4} ; 2\pi\right]$$

Les angles associés

Dans toutes les classes , et dans tous les manuels, on trouve, pour évoquer les angles associés, un défilé d'une dizaine de formules du type $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ qui ne prennent pas toujours beaucoup de sens.

Je considère que ce type d'apprentissage est contre-productif car mes expériences montrent que tout élève, à un moment donné, va commencer à se mélanger, à confondre, à oublier ces formules.
Du coup, ***je propose*** d'apprendre seulement les règles suivantes, qui permettront de retrouver et de simplifier n'importe quelle expression (et de retrouver, par exemple, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$!!).

Règle 1 : quand on ajoute ou quand on soustrait 2π ($x + 2\pi$ ou $x - 2\pi$)

Le *cosinus* et le *sinus* d'un angle sont 2π périodique, on revient donc sur le même point :

la valeur du *cosinus* NE CHANGE PAS.
la valeur du *sinus* NE CHANGE PAS.

On a : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$; $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

On a : $\cos(x - 2\pi) = \cos x$; $\sin(x - 2\pi) = \sin x$

$\rightarrow \cos(x + 6\pi) = \cos x$ en faisant 3 tours complets

Règle 2 : quand on ajoute ou quand on soustrait π ($x + \pi$ ou $x - \pi$)

L'angle π correspond à l'angle plat, c'est comme si on passait de l'autre côté du cercle :

la valeur du *cosinus* CHANGE DE SIGNE.
la valeur du *sinus* CHANGE DE SIGNE.

On a : $\cos(x + \pi) = -\cos x$; $\sin(x + \pi) = -\sin x$

On a : $\cos(x - \pi) = -\cos x$; $\sin(x - \pi) = -\sin x$

Règle 3 : quand on prend l'opposé d'un angle (on change x en $-x$)

C'est comme si on partait d'un côté, dans le sens positif, et de l'autre côté, dans le sens négatif :

la valeur du *cosinus* NE CHANGE PAS.
la valeur du *sinus* CHANGE DE SIGNE.

On a : $\cos(-x) = \cos x$; $\sin(-x) = -\sin x$

Règle 4 : quand on ajoute $\frac{\pi}{2}$ (soit $x + \frac{\pi}{2}$)

Il est difficile ici de facilement se situer sur le cercle, il faudra donc faire un bel effort de mémoire !

On a : $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$; $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

Les angles associés : quelques applications

Les 4 règles de la fiche précedente (qui sont, je le rappelle, plutôt évidentes et facilement mémorisables) vont nous servir à simplifier toutes les autres expressions proposées.

Exemple 1 :

On cherche à montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

On a : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$ on ordonne la parenthèse

$= -\sin(-x)$ règle avec $+\frac{\pi}{2}$, en gardant bien $(-x)$

$= -(-\sin x)$ règle avec $-x$

$= \sin x \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

Exemple 2 :

On cherche à montrer que $\cos(\pi - x) = -\cos x$

On a : $\cos(\pi - x) = \cos(-x + \pi)$ on ordonne la parenthèse

$= -\cos(-x)$ règle avec $+\pi$, en gardant bien $(-x)$

$= -\cos x$ règle avec $-x$

$\rightarrow \cos(\pi - x) = -\cos x$

Exemple 3 :

On cherche à simplifier $\sin(x + 2\pi) - \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos(x - \pi) - \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$

On va retrouver dans ce calcul les 4 règles de la fiche précédente. Entrainez vous à bien les identifier et à bien les appliquer .

On a : $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

$\cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(-x) = -(-\sin x) = \sin x$

$\cos(x - \pi) = -\cos x$

$\sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-x) = \cos x$

Donc $\sin(x + 2\pi) - \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos(x - \pi) - \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$

$= \sin x - \sin x - (-\cos x) - \cos x$

$= \sin x - \sin x + \cos x - \cos x$

$= 0$ résultat surprenant, non ?

Les fonctions trigonométriques : la fonction cosinus

Ensemble de définition

On peut calculer $\cos x$ pour tout nombre réel $\rightarrow D_f = \mathbb{R}$

La fonction cosinus est 2 π périodique

pour tout x, on a $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

$\rightarrow$ par exemple, $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

La fonction cosinus est paire

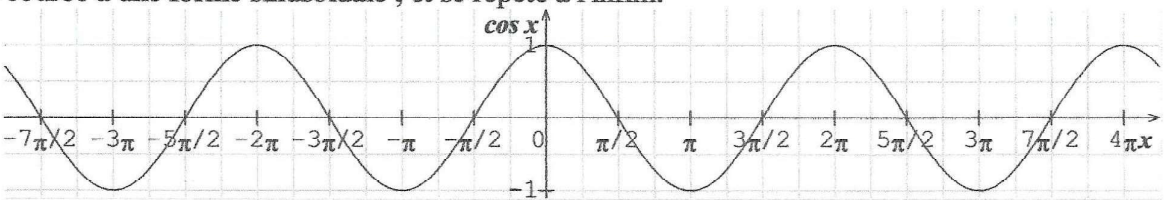
pour tout x, on a $\cos(-x) = \cos x$

La fonction dérivée du cosinus

pour tout x, on a $(\cos x)' = -\sin x$

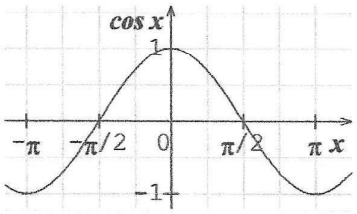
La courbe représentative de la fonction cosinus sur] - ∞ ; + ∞ [

Cette courbe a une forme sinusoidale , et se répète à l'infini.



La courbe représentative du cosinus sur [- π ; π] et le tableau de variations

La fonction *cosinus* étant 2 π périodique et paire , on peut l'étudier simplement sur l'intervalle [- π ; π] , car le reste de la courbe peut se déduire par translation et symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.



x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
variations de cos	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1

La relation fondamentale entre cos et sin

pour tout x, on a $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

↳ si on connait $\sin x = 0,6$ (pour $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$)

alors on a $(\cos x)^2 + 0,6^2 = 1$

soit $(\cos x)^2 = 1 - 0,36 = 0,64$

soit $\cos x = 0,8$ (car $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$)

Les fonctions trigonométriques : la fonction sinus

Ensemble de définition

On peut calculer $\sin x$ pour tout nombre réel $\rightarrow D_f = \mathbb{R}$

La fonction sinus est 2 π périodique

pour tout x, on a $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

$\rightarrow$ par exemple, $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

La fonction sinus est impaire

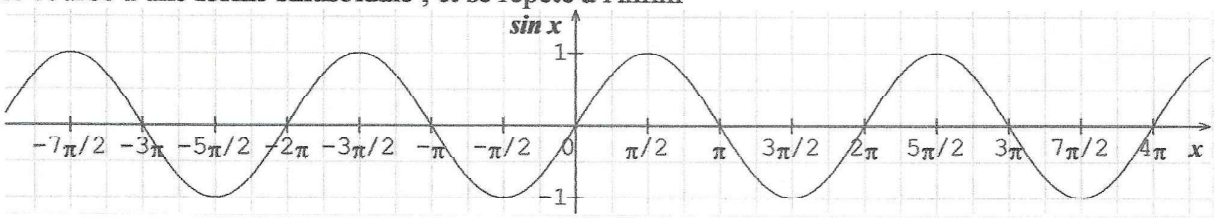
pour tout x, on a $\sin(-x) = -\sin x$

La fonction dérivée du sinus

pour tout x, on a $(\sin x)' = \cos x$

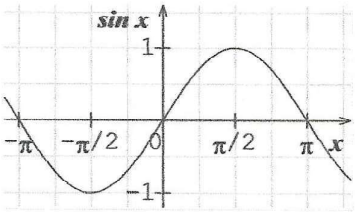
La courbe représentative de la fonction sinus sur] - ∞ ; + ∞ [

Cette courbe a une forme sinusoidale , et se répète à l'infini



La courbe représentative du sinus sur [- π ; π] et le tableau de variations

La fonction *sinus* étant 2 π périodique et impaire , on peut l'étudier simplement sur l'intervalle [- π ; π] , car le reste de la courbe peut se déduire par translation et symétrie par rapport à l'origine O du repère.



x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
variations de sin	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

La relation fondamentale entre cos et sin

pour tout x, on a $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

↳ si on connait $\cos x = 0,8$ (pour $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$)

alors on a $(0,8)^2 + (\sin x)^2 = 1$

soit $(\sin x)^2 = 1 - 0,8^2 = 0,36$

soit $\sin x = 0,6$ (car $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$)

Les fonctions trigonométriques : applications

Etude de la fonction *tangente*

On étudie la fonction *tangente* définie par $f(x) = \tan x$ sur l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

→ ***domaine de définition***

On a : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Donc les valeurs $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ sont bien des valeurs interdites car le dénominateur $\cos x$ s'annulerait alors.

→ ***calcul de la dérivée***

On calcule $(\tan x)'$ avec la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

↳ $u(x) = \sin x \quad v(x) = \cos x$

$u'(x) = \cos x \quad v'(x) = -\sin x$

On a donc $f'(x) = \dfrac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

→ on écrit soit $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ (car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)

→ on écrit soit $(\tan x)' = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

→ ***conclusion pour les variations***

La dérivée $(\tan x)'$ est donc positive sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction tangente est donc croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

→ ***quelques valeurs à connaitre***

On a : $\tan 0 = \dfrac{\sin 0}{\cos 0} = \dfrac{0}{1} = 0$

$\tan \frac{\pi}{4} = \dfrac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

Un bon exemple d'exercice du bac

L'exercice proposé ici est totalement réalisable avec les connaissances de Première (*les compétences présentes dans un sujet du bac ne sont pas que des compétences de Terminale !*).

Il s'agit de **l'exercice 4 du sujet de Métropole de juin 2016 (en enseignement obligatoire)**.

Ce sujet, ainsi que le corrigé, est disponible sur ce site (voir "*les annales du bac*").