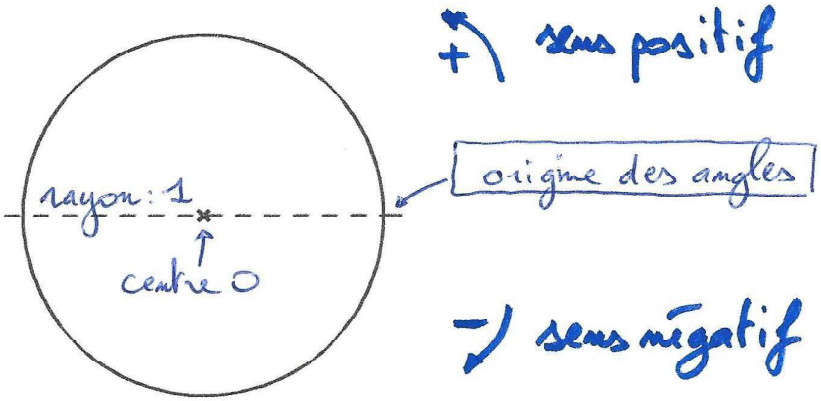
Comment repérer des angles en degrés sur le cercle trigonométrique

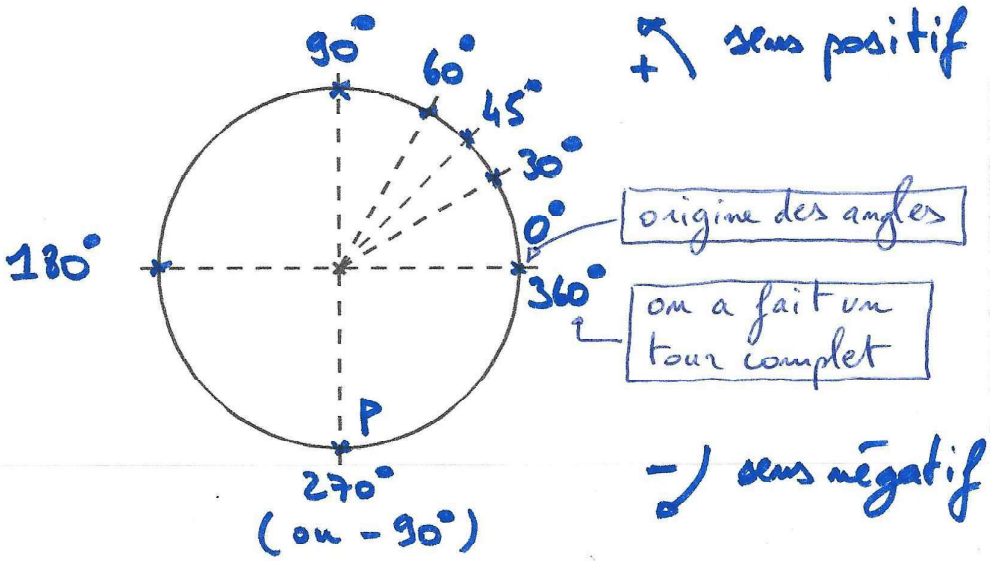
Définition du cercle trigonométrique

Le *cercle trigonométrique* est un cercle de centre O et de rayon 1 , *orienté* dans le sens positif (qui est le sens inverse des aiguilles d'une montre), avec une *origine* (qui sera le point de départ des angles sur ce cercle).



Repérer des angles en degrés

Pour repérer des angles, on partira de *l'origine* du cercle trigonométrique.
Les angles se repèreront à l'aide de points placés sur ce cercle. Ces angles correspondent au fait de tourner, d'un certain nombre de degrés, autour de ce cercle.
Les angles suivants (associés à des points) doivent être parfaitement mémorisés.



Remarques

. On peut observer, par exemple, que le point P permet de repérer (au moins) deux angles :

- un angle négatif, qui est égal à - 90 °.
- un angle positif, qui est égal à 270 ° (car on a tourné de 3 × 90 ° dans le sens positif)

. Le cercle trigonométrique n'est pas fermé, il est en fait infini. C'est un cercle autour duquel on peut tourner autant que l'on veut dans le sens positif ou dans le sens négatif.
Par exemple, en faisant un tour complet dans le sens positif (soit 360 °), le point P correspond également à un angle de 630 ° (soit 270 ° + 360 °).
Difficile de voir à l'oeil cet angle de 630 ° , mais on doit comprendre à quoi correspond cette valeur (par exemple, on pourrait parler de *sept quarts de tour* soit 7 × 90 °).

Le radian , une nouvelle unité d'angles : comment convertir

La définition du *radian* se trouve dans tous les manuels, mais le plus important, en classe de Première, est de savoir parfaitement *manipuler et utiliser cette nouvelle unité d'angle*.

Lien entre degrés et radians

La *correspondance* entre les degrés et les radians est extrêmement simple et basée sur le résultat suivant :

π (en radians) correspond à 180° (en degrés)

Du coup, on aura le tableau suivant, avec des correspondances à connaitre par coeur.

Angles (en radian)	*Angles (en degrés)*
2π	$360° \rightarrow 2 \times 180°$
$\frac{\pi}{2}$	$90° \rightarrow 180° : 2$
$\frac{\pi}{4}$	$45° \rightarrow 180° : 4$
$\frac{\pi}{6}$	$30° \rightarrow 180° : 6$
$\frac{\pi}{3}$	$60° \rightarrow 180° : 3$

Convertir des radians en degrés : la méthode

Pour tous les angles courants, donnés à l'aide de π, cette conversion est très simple.

Il suffira de remplacer π par 180 ° dans l'écriture, et on finit en faisant le calcul correspondant.

Exemple : on veut convertir $\frac{3\pi}{8}$ en degrés

$\rightarrow$ $\frac{3\pi}{8}$ va correspondre à $\frac{3 \times 180°}{8}$

soit $67,5°$

Convertir des degrés en radians : la méthode

Plutôt que d'apprendre à quelle valeur en radian correspond 1 degré, je préconise ***l'utilisation d'un tableau avec une 4e proportionnelle, dans lequel on placera la correspondance entre π et 180 °***.

Le résultat s'obtient en faisant un "produit en croix", il est sous forme fractionnaire et devra être simplifié.

Exemple : on veut convertir 150 ° en radians

$\rightarrow$ on fait le "petit" tableau suivant

180°	π
150°	?

La valeur cherchée est donc :

$\frac{150\pi}{180}$, soit $\frac{5\pi}{6}$.

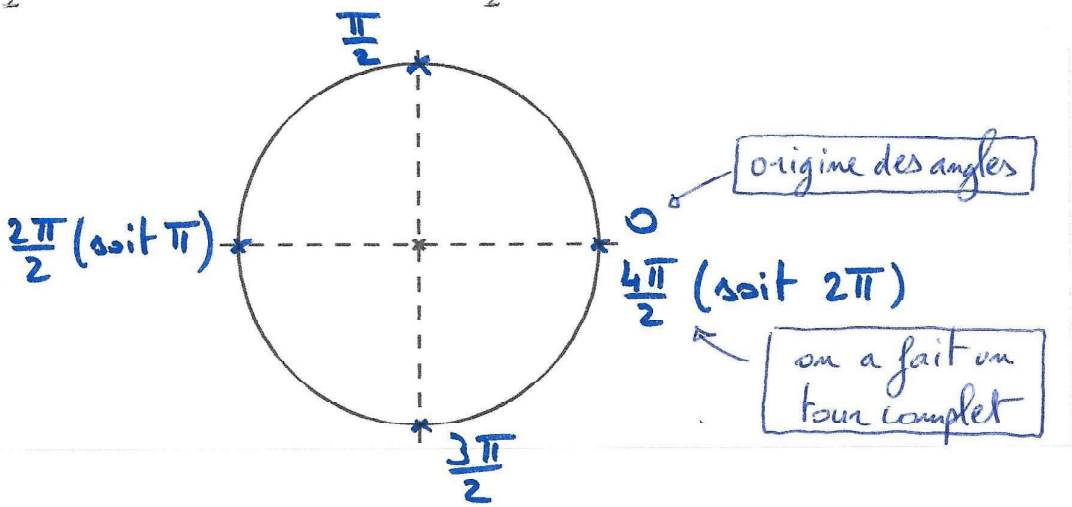
Comment repérer des angles en radians : le partage en $\frac{\pi}{2}$

Il faut parfaitement savoir partager le cercle trigonométique en $\frac{\pi}{2}$; en $\frac{\pi}{4}$; en $\frac{\pi}{6}$; et en $\frac{\pi}{3}$.

C'est la base de tout travail en trigonométrie de Première et de Terminale.

(*rassurez vous, il n'y aura pas à apprendre le partage en* $\frac{\pi}{5}$, *ou en* $\frac{\pi}{8}$, *ou d'autres angles*).

Le partage en $\frac{\pi}{2}$: on n'oubliera pas qu'un angle de $\frac{\pi}{2}$ correspond à 90 ° , soit un quart de tour.



Applications

→ On se souviendra que l'on peut tourner dans le sens *positif* , mais aussi dans le sens *négatif*. On va donc placer sur le cercle ci-dessous quelques valeurs négatives d'angles.

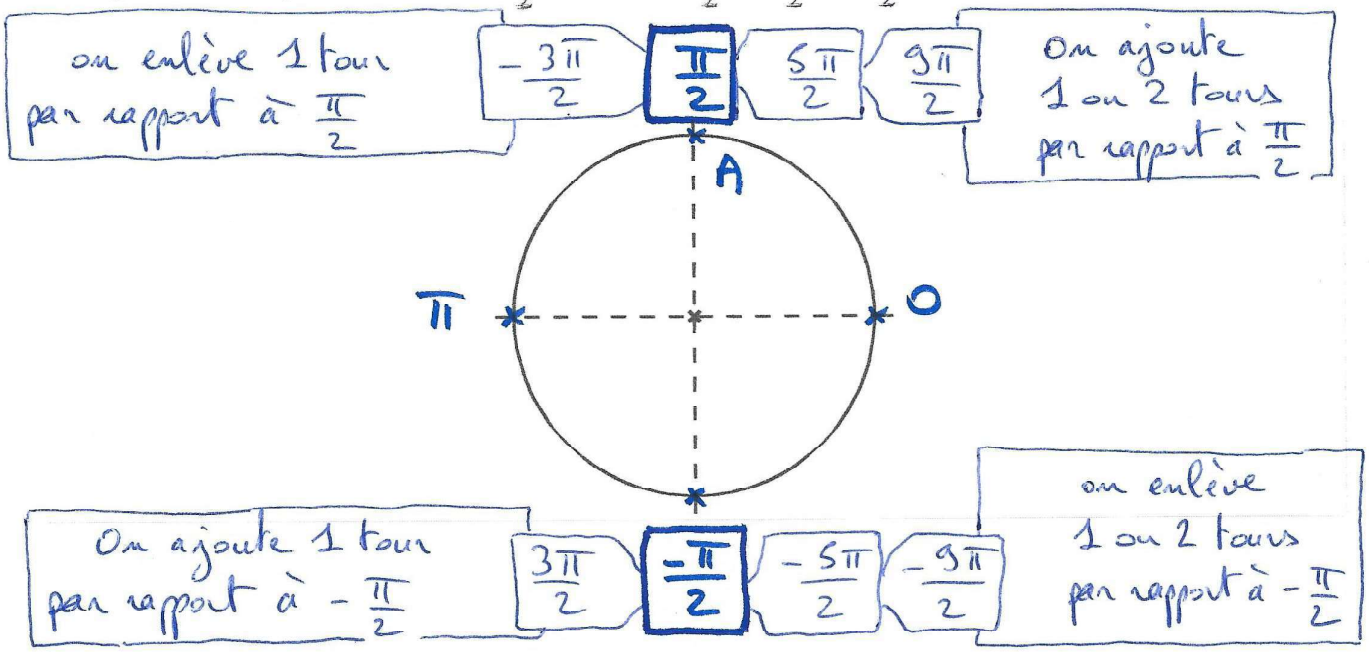
→ De plus, en tournant d'un tour complet (ou de plusieurs), l'angle change mais on revient périodiquement sur *le même point*.

Un même point peut donc être associé à plusieurs angles différents.

Or, le tour complet (2π), ***correspond ici à*** $4\times\frac{\pi}{2}$, ***soit*** $\frac{4\pi}{2}$.

Le point A correspond ici à l'angle $\frac{\pi}{2}$, mais aussi à $\frac{\pi}{2}+2\pi$, soit $\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{2}$, soit $\frac{5\pi}{2}$.

Et ce point A correspondrait aussi à $\frac{5\pi}{2}+2\pi = \frac{5\pi}{2}+\frac{4\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}$ .... et ainsi de suite .....



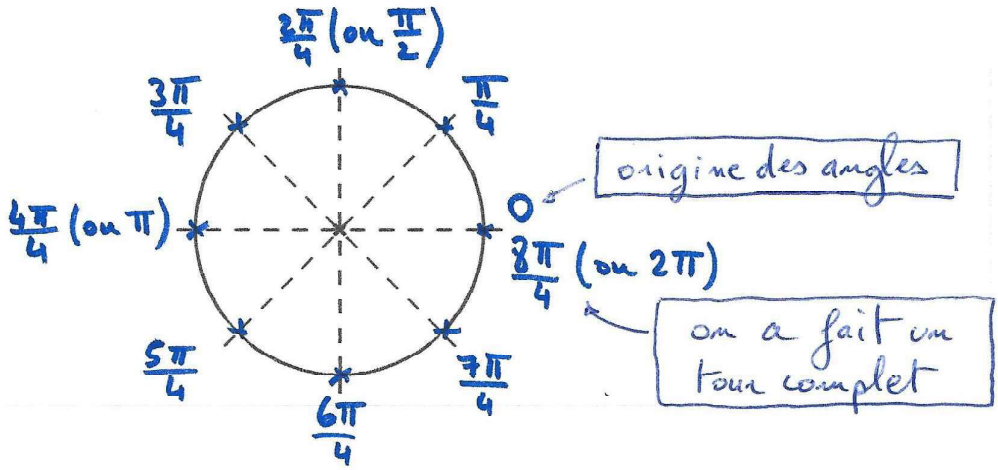
Comment repérer des angles en radians : le partage en $\frac{\pi}{4}$

Il faut parfaitement savoir partager le cercle trigonométique en $\frac{\pi}{2}$; en $\frac{\pi}{4}$; en $\frac{\pi}{6}$; et en $\frac{\pi}{3}$.

C'est la base de tout travail en trigonométrie de Première et de Terminale.

(*rassurez vous, il n'y aura pas de partage en* $\frac{\pi}{5}$ *, ou en* $\frac{\pi}{8}$ *ou avec d'autres angles*).

Le partage en $\frac{\pi}{4}$: on n'oubliera pas qu'un angle de $\frac{\pi}{4}$ représente la moitié d'un angle de $\frac{\pi}{2}$.



Applications

→ On se souviendra que l'on peut tourner dans le sens positif , mais aussi dans le sens négatif. On va donc placer sur le cercle ci-dessous quelques valeurs d'angles négatifs.

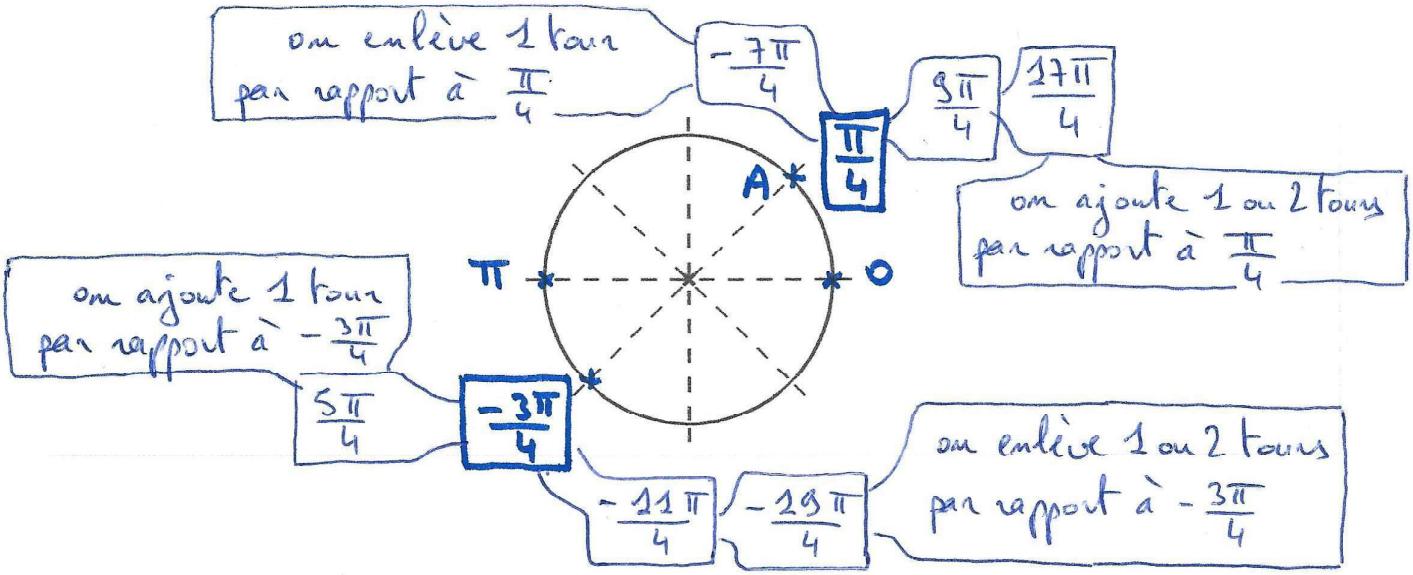
→ De plus, en tournant d'un tour complet (ou de plusieurs), l'angle change mais on revient périodiquement sur le même point.

Un même point peut donc être associé à plusieurs angles différents.

Or, chaque tour complet (2π), ***correspond ici à*** $8\times\frac{\pi}{4}$, ***soit*** $\frac{8\pi}{4}$.

Le point A correspond ici à l'angle $\frac{\pi}{4}$, mais aussi à $\frac{\pi}{4}+2\pi$, soit $\frac{\pi}{4}+\frac{8\pi}{4}$, soit $\frac{9\pi}{4}$.

Et ce point A correspondrait aussi à $\frac{9\pi}{4}+2\pi = \frac{9\pi}{4}+\frac{8\pi}{4} = \frac{17\pi}{4}$ .... et ainsi de suite ...



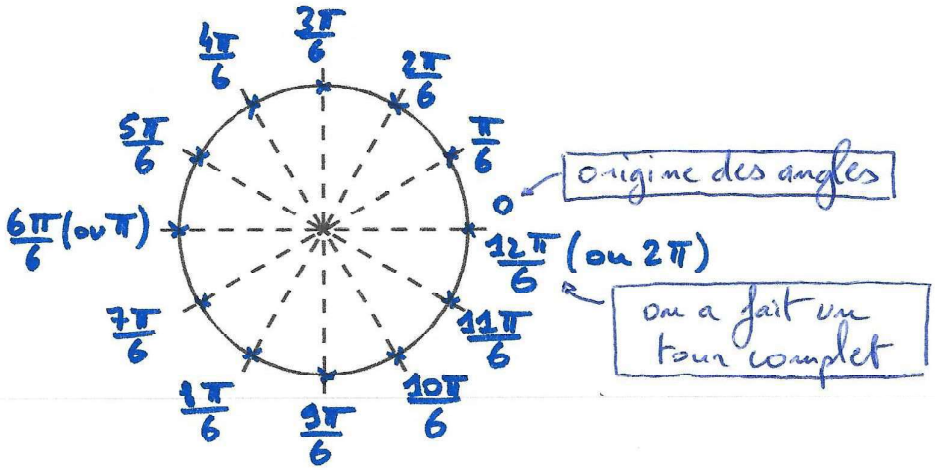
Comment repérer des angles en radians : le partage en $\frac{\pi}{6}$

Il faut parfaitement savoir partager le cercle trigonométique en $\frac{\pi}{2}$; en $\frac{\pi}{4}$; en $\frac{\pi}{6}$; et en $\frac{\pi}{3}$.

C'est la base de tout travail en trigonométrie de Première et de Terminale.

(*rassurez vous, il n'y aura pas de partage en* $\frac{\pi}{5}$ *, ou en* $\frac{\pi}{8}$ *ou avec d'autres angles*).

Le partage en $\frac{\pi}{6}$: on n'oubliera pas qu'un angle de $\frac{\pi}{6}$ correspond à 30°, soit le tiers de l'angle droit.



Applications

→ On se souviendra que l'on peut tourner dans le sens positif , mais aussi dans le sens négatif. On va donc placer sur le cercle ci-dessous quelques valeurs d'angles négatifs.

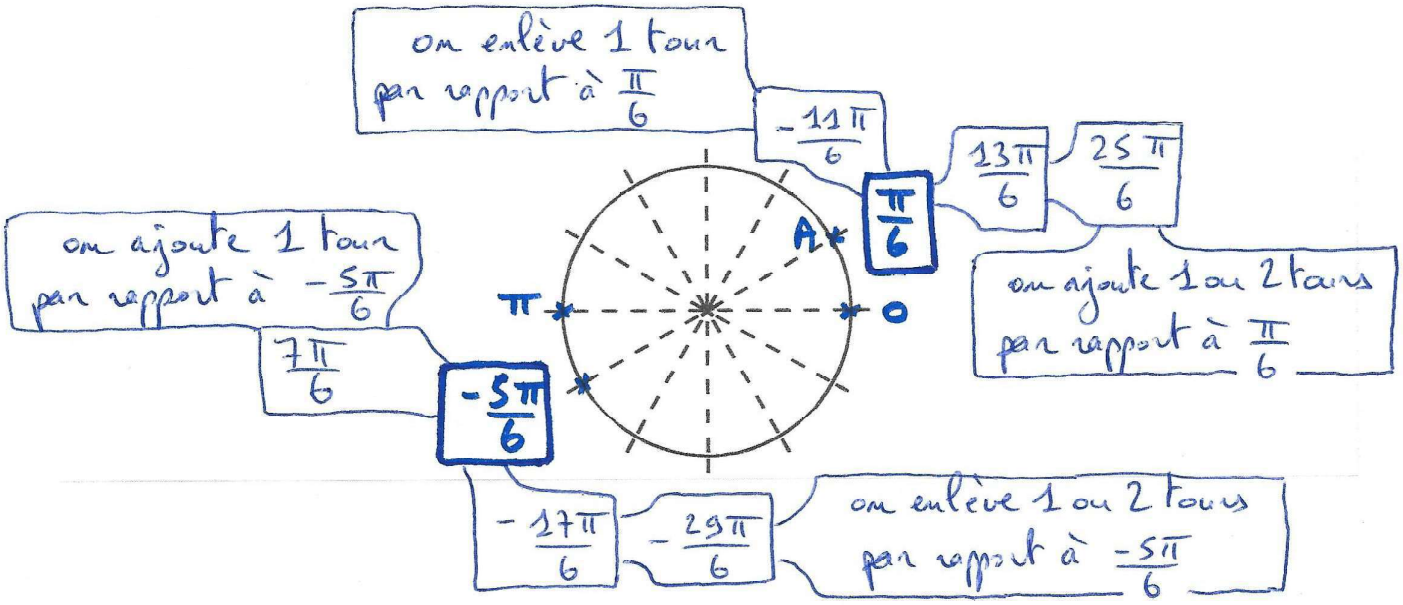
→ De plus, en tournant d'un tour complet (ou de plusieurs), l'angle change mais on revient périodiquement sur le même point.

Un même point peut donc être associé à plusieurs angles différents.

Or, chaque tour complet (2π), ***correspond ici à*** $12\times\frac{\pi}{6}$, ***soit*** $\frac{12\pi}{6}$.

Le point A correspond ici à l'angle $\frac{\pi}{6}$, mais aussi à $\frac{\pi}{6}+2\pi$, soit $\frac{\pi}{6}+\frac{12\pi}{6}$, soit $\frac{13\pi}{6}$.

Et ce point A correspondrait aussi à $\frac{13\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6}+\frac{12\pi}{6}=\frac{25\pi}{6}$ ... et ainsi de suite ...



Comment repérer des angles en radians : le partage en $\frac{\pi}{3}$

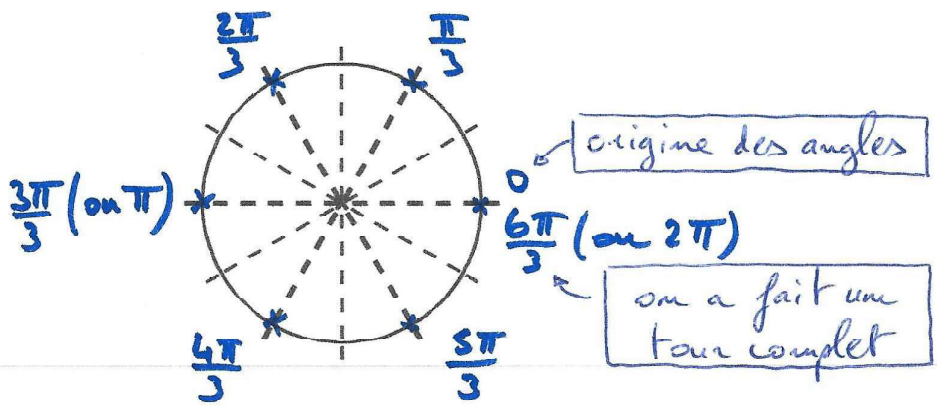
Il faut parfaitement savoir partager le cercle trigonométique en $\frac{\pi}{2}$; en $\frac{\pi}{4}$; en $\frac{\pi}{6}$; et en $\frac{\pi}{3}$.

C'est la base de tout travail en trigonométrie de Première et de Terminale.

(*rassurez vous, il n'y aura pas de partage en* $\frac{\pi}{5}$ *, ou en* $\frac{\pi}{8}$ *ou avec d'autres angles*).

Le partage en $\frac{\pi}{3}$: on n'oubliera pas qu'un angle de $\frac{\pi}{3}$ représente la double d'un angle de $\frac{\pi}{6}$.

Aussi, je préconise de faire le partage en $\frac{\pi}{6}$ et de prendre deux secteurs angulaires à chaque fois.



Applications

→ On se souviendra que l'on peut tourner dans le sens positif , mais aussi dans le sens négatif. On va donc placer sur le cercle ci-dessous quelques valeurs d'angles négatifs.

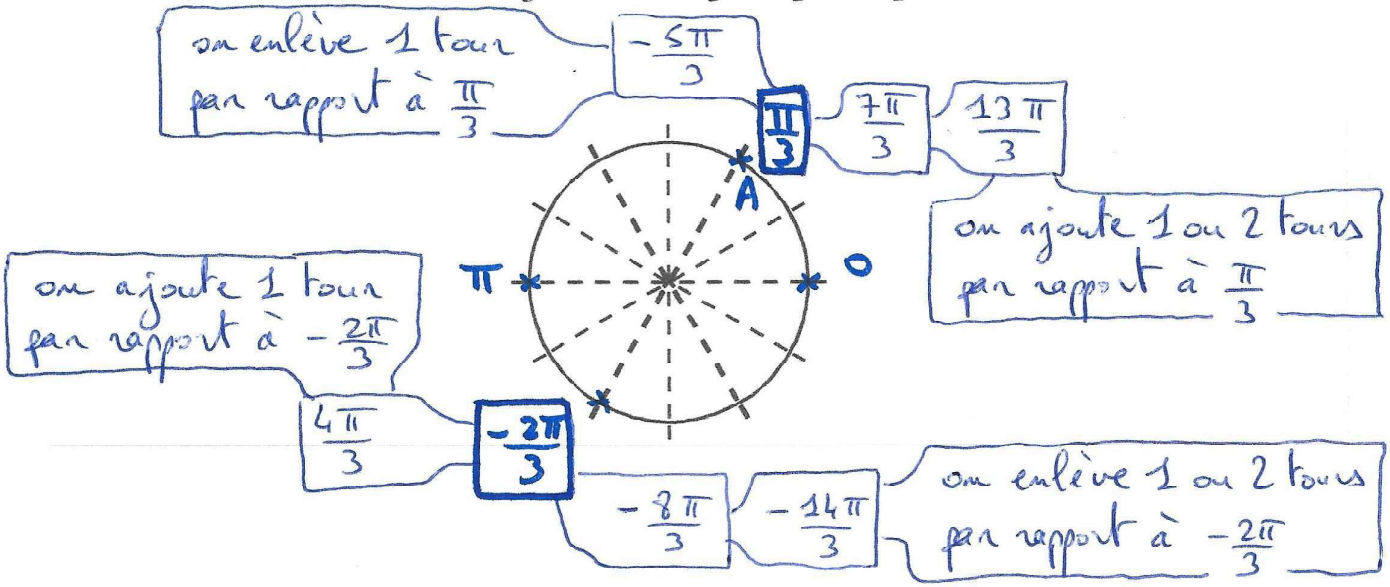
→ De plus, en tournant d'un tour complet (ou de plusieurs), l'angle change mais on revient périodiquement sur le même point.

Un même point peut donc être associé à plusieurs angles différents.

Or, chaque tour complet (2π), ***correspond ici à*** $6\times\frac{\pi}{3}$, ***soit*** $\frac{6\pi}{3}$.

Le point A correspond ici à l'angle $\frac{\pi}{3}$, mais aussi à $\frac{\pi}{3}+2\pi$, soit $\frac{\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}$, soit $\frac{7\pi}{3}$.

Et ce point A correspondrait aussi à $\frac{7\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}=\frac{13\pi}{3}$ ... et ainsi de suite ...



La mesure principale d'un angle

Puisqu'une infinité de valeurs d'angles correspond à même point du cercle trigonométrique (*en tournant d'un certains nombres de tours*), il est nécessaire d'avoir une valeur d'angle *visualisable* sur le cercle et qui servira de *valeur référence* : ***c'est la mesure principale d'un angle***.

Définition de la mesure principale

Pour un angle donné, parmi toutes ses mesures possibles, sa *mesure principale* sera la seule qui sera comprise dans l'intervalle $]-\pi\ ;\pi]$.

Concrètement, dans l'écriture d'un angle sous la forme $\frac{\square\pi}{\square}$, on aura sa mesure principale si la valeur du numérateur est *inférieure* à celle du dénominateur (sans s'occuper de π et des éventuels négatifs (-))

Exemples :

→ $\frac{7\pi}{6}$ et $-\frac{8\pi}{6}$ ne sont pas des mesures principales.
(car on a $7>6$ et on a $8>6$)

→ $\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$ (soit $-\frac{1\pi}{6}$) sont des mesures principales.
(car on a $5<6$ et on a $1<6$)

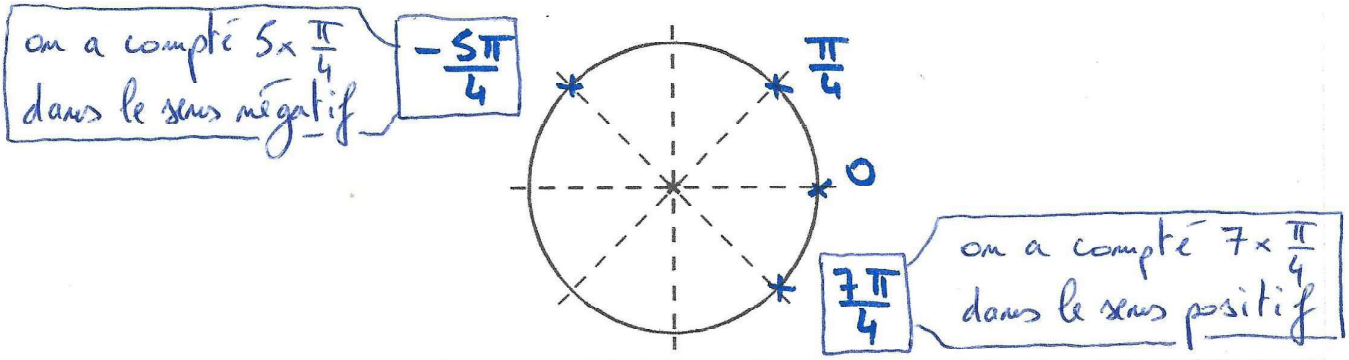
Un exemple avec le cercle trigonométrique

Pour les techniques de calculs, avec des "grands angles", nous aurons les fiches suivantes.
Car il est important ici de comprendre que "*donner une mesure principale*" n'est pas synonyme de "*technique compliquée vue avec le prof* ".

On va, par exemple, donner la mesure principale de l'angle $\frac{7\pi}{4}$, puis de l'angle $\frac{-5\pi}{4}$.

Méthode

Il suffit, tout simplement, de placer $\frac{7\pi}{4}$ et $\frac{-5\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique (que l'on a partagé en $\frac{\pi}{4}$) et de donner ainsi leur mesure principale.



La mesure principale de $\frac{7\pi}{4}$ est égale à $-\frac{\pi}{4}$.

La mesure principale de $-\frac{5\pi}{4}$ est égale à $\frac{3\pi}{4}$.

Comment trouver la mesure principale d'un angle : la méthode

On cherche la mesure principale de $\frac{19\pi}{4}$

→ inutile, à nouveau, de mettre en place une technique particulière de calcul.

En effet, il suffit de partager le cercle trigonométrique en $\frac{\pi}{4}$ et de se souvenir qu'*un tour complet* autour de ce cercle correspond à 2π, soit $\frac{8\pi}{4}$ (c'est à dire $8 \times \frac{\pi}{4}$).

Méthode :

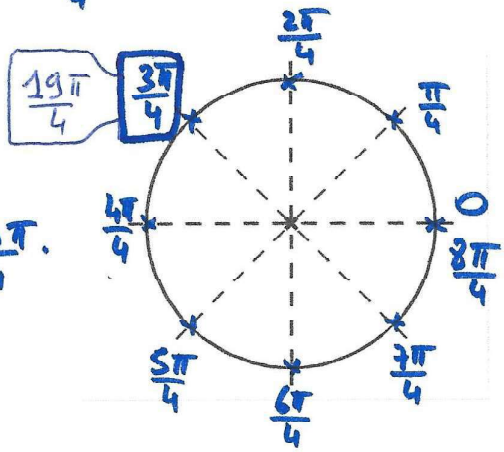
→ on part de zéro.

→ avec un tour complet, on arrive sur $\frac{8\pi}{4}$.

→ avec un deuxième tour complet, on arrive sur $\frac{16\pi}{4}$ (et cela correspond au point de départ).

→ il reste $\frac{3\pi}{4}$ à faire pour arriver à $\frac{19\pi}{4}$.

Donc la mesure principale de $\frac{19\pi}{4}$ est égale à $\frac{3\pi}{4}$.



On cherche la mesure principale de $\frac{257\pi}{4}$

→ avec ce type d'angle, on ne pourra plus se contenter de compter des tours !

On va mettre en place une méthode de calcul, en utilisant toujours le principe de base qui nous dit qu'*un tour complet* correspond à 2π, soit $\frac{8\pi}{4}$ (c'est à dire $8 \times \frac{\pi}{4}$).

Méthode :

→ on divise 257 par 8 (qui correspond au tour complet).

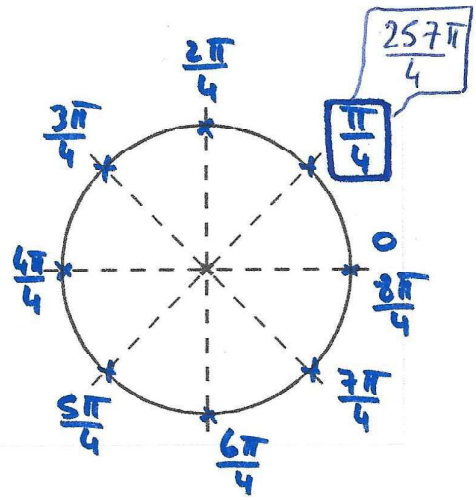
→ la partie entière du résultat est égale à 32.

→ on calcule 32×8 et on obtient 256.

→ donc, en faisant 32 tours complets, on arrive à $256\frac{\pi}{4}$.

→ il reste $\frac{1\pi}{4}$ à faire pour arriver à $\frac{257\pi}{4}$.

Donc la mesure principale de $\frac{257\pi}{4}$ est égale à $\frac{\pi}{4}$.



Comment trouver la mesure principale d'un angle : des exemples

Vous avez déjà la méthode pour trouver une mesure principale sur les fiches précédentes. Nous allons, du coup, nous contenter d'écrire ici les réponses, en proposant une *rédaction type* pour chaque exemple.

On cherche la mesure principale de $\frac{209\pi}{6}$

→ un tour complet correspond ici à $\frac{12\pi}{6}$.

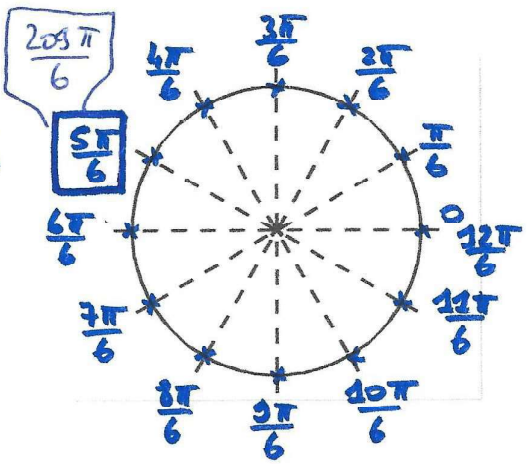
→ on calcule $209 : 12 \simeq 17,4$

→ on calcule alors 17×12 et on obtient 204.

→ donc, en faisant 17 tours complets, on arrive à $\frac{204\pi}{6}$.

→ il reste $\frac{5\pi}{6}$ à faire pour arriver à $\frac{209\pi}{6}$.

Donc la mesure principale de $\frac{209\pi}{6}$ est égale à $\frac{5\pi}{6}$.



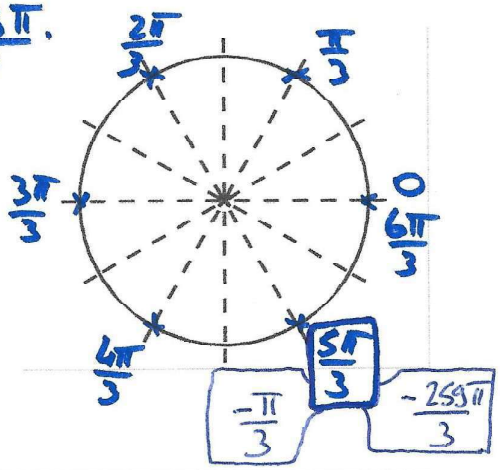
On cherche la mesure principale de $\frac{-259\pi}{3}$

→ un tour complet correspond ici à $\frac{6\pi}{3}$

→ on calcule $259 : 6 \simeq 43,17$

→ on calcule alors 43×6 et on obtient 258.

→ donc, en faisant 43 tours complets, dans le sens négatif, on arrive à $-\frac{258\pi}{3}$.

→ il reste $-\frac{1\pi}{3}$ à faire pour arriver à $-\frac{259\pi}{3}$

Donc la mesure principale de $-\frac{259\pi}{3}$ est égale à $-\frac{\pi}{3}$.