La fonction logarithme népérien : définition , variations , courbe

Domaine de définition

C'est l'ensemble des nombres x pour lesquels on peut calculer $\ln x$.
Ici , l'ensemble de définition sera $]\,0\,;+\infty\,[$, c'est à dire que l'on ne peut calculer $\ln x$ que pour des nombres *strictement positisifs*.

Le nombre $\ln(-2)$ n'existe pas.
Le nombre $\ln 0$ n'existe pas.
Le nombre $\ln 5$ existe et on a $\ln 5 \simeq 1,6$.

Tableau de variations, valeurs à connaitre et les limites

Connaitre une fonction, c'est ***connaitre par coeur*** son tableau de variations, avec quelques valeurs caractéristiques, et les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

x	0		1		e		$+\infty$
Variations de ln x	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

Conséquences immédiates

→ on a $\ln 1 = 0$ (ne jamais écrire $\ln 0 = 1$!)
et $\ln e = 1$

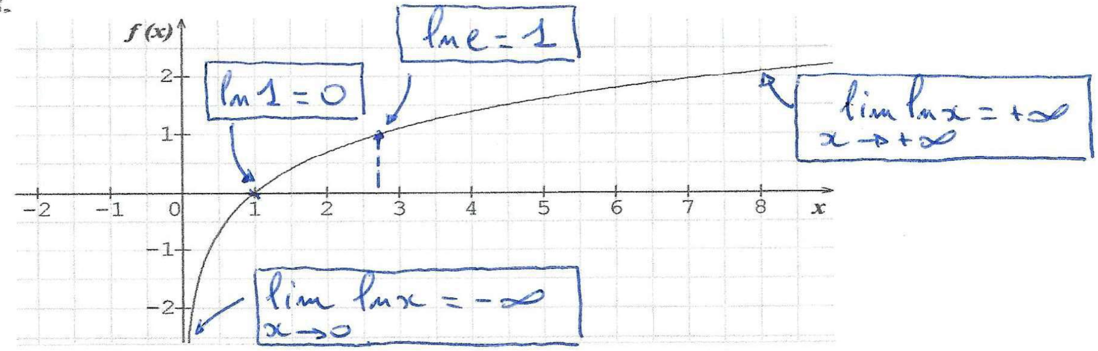
→ on a $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

→ la fonction $\ln$ est croissante sur $]0;+\infty[$.

→ pour $x \in]0;1]$, on a $\ln x \leq 0$ (négatif)
pour $x \in [1;+\infty[$, on a $\ln x \geq 0$ (positif)
Par exemple, on a $\ln 0,7 \approx -0,36$ (négatif)
et $\ln 1,3 \approx 0,26$ (positif)

La courbe représentative

Elle doit nous aider à bien mémoriser les *variations* de la fonction logarithme , les *valeurs* à connaitre par coeur et les *limites*.



Comment calculer avec la fonction logarithme : les propriétés

Les propriétés

On pourra se souvenir que les propriétés de calculs de la *fonction logarithme* fonctionnent "*à l'inverse*" des propriétés de calculs de la *fonction exponentielle* (car ces deux fonctions sont réciproques l'une par rapport à l'autre).

On a : $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

Formule avec le logarithme et les puissances

Cette formule est très importante et nous servira à faire "*descendre*" des puissances dans certains calculs.

On a : $\ln(x^n) = n \times \ln x$

Quelques exemples de calculs

Il faudra s'entrainer à être *parfaitement à l'aise* avec tous ces calculs algébriques utilisant $\ln x$.

$$\ln 4 + \ln 5 = \ln(4 \times 5) = \ln 20.$$

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{12}{6}\right) = \ln 2.$$

On a : $\sqrt{x} = x^{1/2} \rightarrow \ln\sqrt{x} = \ln x^{1/2} = \frac{1}{2}\ln x.$

$$\ln 2 + \ln 8 + \ln 16$$
$$= \ln 2 + \ln 2^3 + \ln 2^4$$
$$= \ln 2 + 3\ln 2 + 4\ln 2$$
$$= 8\ln 2.$$

$$\ln(e^2\sqrt{e}) + 4\ln(e^3)$$
$$= \ln e^2 + \ln\sqrt{e} + 4\ln e^3$$
$$= 2\ln e + \frac{1}{2}\ln e + 4 \times 3\ln e$$
$$= 2 + \frac{1}{2} + 12 = \frac{29}{2}.$$

$\boxed{\text{car } \ln e = 1}$

Comment résoudre une équation avec logarithme

Propriété

Il faudra se souvenir que les fonctions *exponentielle* et *logarithme népérien* sont des fonctions *réciproques* l'une par rapport à l'autre. Du coup, elles vont ***"s'annuler"*** entre elles (un peu comme les fonctions *carré* et *racine carrée* pour lesquelles on a ($\sqrt{5}$)$^2 = 5$).

Pour tout x positif, on a : $e^{\ln x} = x$

Point de départ

Il faudra maitriser les 3 équations de bases suivantes.

- $\ln x = \ln 7 \to x = 7$
- $\ln x = 0 \to \ln x = \ln 1 \to x = 1$
- $\ln x = 1 \to \ln x = \ln e \to x = e$

Résolution des équations avec la fonction logarithme

On appliquera la fonction *exponentielle* à la fonction *ln* afin de faire "*disparaitre le ln à l'aide de l'expo*" !
Mais il faudra toujours se poser la question de l'ensemble de définition de l'équation initiale.

$\ln x = 4 \to e^{\ln x} = e^4 \to x = e^4$

$\ln(2x+1) = 3$ (avec $2x+1 > 0$ soit $x > -\frac{1}{2}$)

$\to e^{\ln(2x+1)} = e^3$

$\to 2x + 1 = e^3 \to x = \dfrac{e^3 - 1}{2}$ ne pas chercher à simplifier

la solution est bien dans l'ensemble de définition

$2\ln(-4x+1) - 10 = 0$ (avec $-4x+1 > 0$ soit $x < \frac{1}{4}$)

$\to \ln(-4x+1) = \frac{10}{2} = 5$ bien isoler $\ln(-4x+1)$ avant d'appliquer l'expo

$\to e^{\ln(-4x+1)} = e^5$

$\to -4x+1 = e^5 \to x = \dfrac{e^5 - 1}{-4}$

la solution est bien dans l'ensemble de définition

Comment gérer l'ensemble de définition d'une équation

Le principe

La fonction *logarithme népérien* n'étant définie que sur $]0\,;+\infty[$, il faudra *avant de commencer* définir l'ensemble de définition de l'équation, et il faudra vérifier *à la fin* que les solutions trouvées sont bien dans cet ensemble de définition.

Un exemple de base

Il va nous permettre de constater que toutes les solutions d'une équation avec *ln* ne sont pas acceptables.

On veut résoudre $\ln x = \ln x^2$

→ *ensemble de définition*

On veut $x > 0$ et $x^2 > 0$ (soit $x \neq 0$) $\rightarrow D_f =]0;+\infty[$

→ *résolution de l'équation*

On résout $\ln x = \ln x^2$

$\rightarrow x = x^2 \rightarrow x - x^2 = 0 \rightarrow x(1-x) = 0$

$\rightarrow x = 0$ ou $x = 1$

MAIS $0 \notin D_f$ donc on a $S = \{1\}$.

Un autre exemple

C'est un très bel exemple d'équation pour laquelle l'ensemble de définition était à bien surveiller.

On veut résoudre $\ln x + \ln(8x+3) = \ln x^2$

→ *ensemble de définition*

On veut
$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 8x+3 > 0 \rightarrow x > -\frac{3}{8} \\ x^2 > 0 \rightarrow x \neq 0 \end{array}\right\}$$
On a donc $D_f =]0;+\infty[$

→ *résolution de l'équation*

On résout $\ln x + \ln(8x+3) = \ln x^2$

$\rightarrow \ln x(8x+3) = \ln x^2$

$\rightarrow x(8x+3) = x^2$

$\rightarrow 8x^2 + 3x = x^2$

$\rightarrow 7x^2 + 3x = 0$

$\rightarrow x(7x+3) = 0$ soit $x = 0$ ou $x = -\frac{3}{7}$

MAIS aucune des solutions n'est dans D_f

Donc on a ici $S = \emptyset$.

Comment résoudre une inéquation avec logarithme

Point de départ

Le principe de la résolution est le même que celui qui concerne les équations. On utilisera le caractère *réciproque* des fonctions *logarithme népérien* et *exponentielle*.
De plus, en travaillant avec des inéquations, il n'y aura ***pas de changement des inégalités*** en appliquant ces deux fonctions, car ce sont des fonctions *croissantes* qui ***conservent l'ordre***.
Par contre, il y aura toujours l'***inversion des inégalités*** lorsque l'on fera une division par un négatif et il faudra ***faire coïncider les solutions obtenues avec l'ensemble de définition*** .

Résolution des inéquations avec la fonction logarithme

On appliquera la fonction *exponentielle* à la fonction *ln* afin de faire "*disparaitre le ln à l'aide de l'expo*" !

On veut résoudre $\ln x < \ln 7$

→ *ensemble de définition*

On veut $x > 0$ → $D_f =]0;+\infty[$

→ *résolution de l'inéquation*

On résout $\ln x < \ln 7$

→ $e^{\ln x} < e^{\ln 7}$

→ $x < 7$

Mais, avec D_f, il faut aussi que $x > 0$.

Donc on a $S =]0;7[$

On veut résoudre $\ln(-2x+1) > 3$

→ *ensemble de définition*

On veut $-2x+1 > 0$ → $x \boxed{<} \frac{1}{2}$ → $D_f =]-\infty;\frac{1}{2}[$

→ *résolution de l'inéquation*

On résout $\ln(-2x+1) > 3$

→ $e^{\ln(-2x+1)} > e^3$

→ $-2x+1 > e^3$

→ $x \boxed{<} \frac{e^3-1}{-2}$ $\simeq -9{,}54$

inversion du signe en divisant par -2

Mais, avec D_f, il faut aussi que $x < \frac{1}{2}$.

Donc on a $S =]-\infty;\frac{e^3-1}{-2}[$

Comment gérer l'ensemble de définition d'une inéquation

Le principe

La fonction *logarithme népérien* n'étant définie que sur $]0 ; +\infty[$, il faudra avant de commencer la résolution définir l'ensemble de définition de l'inéquation, et il faudra vérifier à la fin que les solutions trouvées sont bien dans cet ensemble de définition.

Un exemple de base : on va constater que toutes les solutions de l'inéquation ne sont pas acceptables.

On veut résoudre $ln(x+1) + ln(x+2) > ln\,2$

→ *ensemble de définition*

On veut $x+1>0$ et $x+2>0$

soit $x>-1$ et $x>-2$ → $Df =]-1;+\infty[$

→ *résolution de l'équation*

On résout : $\ln(x+1) + \ln(x+2) > \ln 2$

→ $\ln(x+1)(x+2) > \ln 2$

→ $(x+1)(x+2) > 2$

→ $x^2 + 3x + 2 > 2$

→ $x^2 + 3x > 0$ → $x(x+3) > 0$

Le tableau de signes de $x(x+3)$ est :

		-3		0	
	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc il faut que $x \in]-\infty;-3[\cup]0;+\infty[$.

Mais, avec Df, il faut aussi que $x>-1$.

On obtient donc finalement : $S =]0;+\infty[$

Un autre exemple : on va constater que l'ensemble de définition était à bien surveiller.

On veut résoudre $ln(x-2) > ln(2x-1)$

→ *ensemble de définition*

On veut $x-2>0$ et $2x-1>0$

soit $x>2$ et $x>\frac{1}{2}$ → $Df =]2;+\infty[$

→ *résolution de l'équation*

On résout : $\ln(x-2) > \ln(2x-1)$

→ $x-2 > 2x-1$

→ $-1 > x$ ou $x < -1$

Mais, avec Df, il faut aussi que $x > 2$.

C'est impossible → $S = \emptyset$ (il n'y a pas de solution).

Comment résoudre une inéquation avec l'inconnue en puissance

Souvent, à la fin d'un exercice sur les suites, lorsque l'on a obtenu la formule explicite de la suite, on peut nous demander de résoudre une inéquation où l'inconnue se trouve en puissance.
Il faut donc savoir parfaitement appliquer la méthode de résolution décrite sur cette fiche !

La formule à connaitre par coeur

Dans la méthode, on doit utiliser une propriété de la fonction *logarithme népérien* qui nous permettra de "*faire descendre la puissance*" :

$$\boxed{\ln(a^n) = n \times \ln(a)}$$

Un exemple tout simple

On veut résoudre l'inéquation : $1{,}9^n > 16\,000$

$\rightarrow \ln(1{,}9^n) > \ln(16\,000)$

$\rightarrow n \times \ln 1{,}9 > \ln 16\,000$

$\rightarrow n > \dfrac{\ln 16\,000}{\ln 1{,}9} \simeq 15{,}08$ $\rightarrow n \geq 16$

il faut forcément un nombre entier

Un exemple plus compliqué

On a réussi à obtenir la formule explicite d'une suite (U_n) avec $U_n = 80 - 60 \times 0{,}75^n$.
On cherche alors, à partir de quel rang n , la suite (U_n) devient supérieure à 78.

On veut : $U_n > 78$

soit $80 - 60 \times 0{,}75^n > 78$

soit $-60 \times 0{,}75^n > -2$

soit $0{,}75^n \boxed{<} \dfrac{-2}{-60}$

on divise par un négatif donc on inverse le signe

soit $\ln 0{,}75^n < \ln\left(\dfrac{1}{30}\right)$

on a $\dfrac{-2}{-60} = \dfrac{1}{30}$

soit $n \times \ln 0{,}75 < \ln\left(\dfrac{1}{30}\right)$

soit $n \boxed{>} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{30}\right)}{\ln 0{,}75} \approx 11{,}82$

on inverse à nouveau car ln 0,75 est négatif

La condition est donc vérifiée à partir du rang 12.

Comment étudier le signe d'une expression avec la fonction logarithme

Un petit rappel

Le tableau de signes de la fonction ln est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signes de ln x	$\|\|$	$-$	0	$+$	

valeur interdite

La méthode

Le souci de la fonction ln va rester son ensemble de définiton Df qu'il faudra toujours déterminer au début. Ensuite, on sera amené à résoudre des inéquations, en respectant cet ensemble de définition.

Les exemples de base

→ **On étudie le signe de** $ln(x+1)$

* On veut $x+1>0 \rightarrow x>-1 \rightarrow Df =]-1;+\infty[$

* On a $\ln(x+1)>0$ si $x+1>1$ soit $x>0$

et $\ln(x+1)<0$ si $x+1<1$ soit $x<0$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	-1		0		$+\infty$
Signes de ln (x + 1)	$\|\|$	$-$	0	$+$	

→ **On étudie le signe de** $ln(-4x-8)$

* On veut $-4x-8>0 \rightarrow x<-2 \rightarrow Df =]-\infty;-2[$

* On a $\ln(-4x-8)>0$ si $-4x-8>1$ soit $x<-\frac{9}{4}$

et $\ln(-4x-8)<0$ si $-4x-8<1$ soit $x>-\frac{9}{4}$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{9}{4}$		-2
Signes de ln (- 4x - 8)		$+$	0	$-$	$\|\|$

→ **On étudie le signe de** $ln(x+3)-1$

* On veut $x+3>0 \rightarrow x>-3 \rightarrow Df =]-3;+\infty[$

* On a $\ln(x+3)-1>0$ si $\ln(x+3)>1 \rightarrow x+3>e$

Donc on a $\ln(x+3)-2>0$ si $x>e-3$

et $\ln(x+3)-1<0$ si $x<e-3$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	-3		$e-3$		$+\infty$
Signes de ln (x + 3) - 1	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Etude de signe d'expressions avec la fonction logarithme
Applications

Les exemples que l'on va voir sur cette fiche constitue chacun un petit exercice en soit.
Il n'y aura pas de réponses toutes faites , de résultat de cours à appliquer directement par coeur ....
Pour chacun, il faudra appliquer les méthodes de calculs apprises et bien conclure pour les signes.

Application 1 : On étudie le signe de $f(x) = x \ln x$

On veut que $x > 0 \rightarrow D_f =]0;+\infty[$
et on sait que $\ln x \geq 0$ pour $x \geq 1$
et $\ln x \leq 0$ pour $x \leq 1$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signes de x	||	$+$	|	$+$	
Signes de $\ln x$	||	$-$	0	$+$	
Signes de $f(x)$	||	$-$	0	$+$	

Application 2 : On étudie le signe de $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$

On veut que $x > 0 \rightarrow D_f =]0;+\infty[$
et on a $(\ln x)^2 - \ln x = \ln x(\ln x - 1)$.
or $\ln x = 0$ pour $x = 1$ et $\ln x - 1 = 0$ pour $x = e$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
Signes de $\ln x$	||	$-$	0	$+$	|	$+$	
Signes de $\ln x - 1$	||	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signes de $f(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

Application 3 : On étudie le signe de $f(x) = 2\ln x + 2$

On veut $x > 0 \rightarrow D_f =]0;+\infty[$
et on a $2\ln x + 2 = 2(\ln x + 1)$
or $\ln x + 1 = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = \frac{1}{e}$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
Signes de $\ln x + 1$	||	$-$	0	$+$	
Signes de $f(x)$	||	$-$	0	$+$	

Comment calculer une limite (sans forme indéterminée)

N'hésitez pas à consulter, sur ce site, le chapitre sur "*Les limites de fonctions*" afin de bien mémoriser quelles sont les formes indéterminées et donc, pour cette fiche, cela vous aidera à mémoriser les autre cas de limites qui ne seront pas des formes indéterminées (et qui se calculent donc directement).

Les limites de la fonction logarithme

Elles sont absolument à ***connaitre par coeur*** !!

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

Quelques exemples de limites

avec $f(x) = 3\ln x + 4x - 2$

en 0, on a une limite du type $-\infty + 0 - 2$

soit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

en $+\infty$, on a une limite du type $+\infty + \infty - 2$

soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

avec $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

en 0, on a une limite du type $\dfrac{-\infty}{0}$

soit $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$

ce n'est pas une forme indéterminée

avec $h(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

en 0, on a une limite du type $\dfrac{0}{-\infty}$

soit $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$

ce n'est pas une forme indéterminée

Comment calculer une limite (avec forme indéterminée FI)
Les croissances comparées

Les croissances comparées

Ces croissances comparées s'utiliseront lorsque nous serons devant un cas de *forme indéterminée* (que l'on notera FI pour simplifier). Le principe général peut se résumer ainsi :

en terme de limites, le logarithme népérien (*ln*) " *perd* " toujours devant l'exponentielle et le logarithme népérien (*ln*) " *perd* " toujours devant les puissances de x (x , x^2 , x^3 ...)

En résumé :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0$
Ce sont des F.I. du type $\dfrac{\infty}{\infty}$, mais $\ln x$ "perd", en se trouvant au numérateur.	

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x} = +\infty$
Ce sont des F.I. du type $\dfrac{\infty}{\infty}$, mais $\ln x$ "perd", en étant cette fois au dénominateur.	

$\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$
c'est une F.I. du type $0 \times \infty$, mais $\ln x$ "perd" ou plutôt c'est x qui l'emporte.

Application

On cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x + 3}{x^2 + 1}$

On factorise : $\dfrac{\ln x + 3}{x^2 + 1} = \dfrac{\ln x\left(1 + \frac{3}{\ln x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \underbrace{\boxed{\dfrac{\ln x}{x^2}}}_{\to 0} \times \dfrac{\left(1 + \overbrace{\boxed{\frac{3}{\ln x}}}^{\to 0}\right)}{\left(1 + \underbrace{\boxed{\frac{1}{x^2}}}_{\to 0}\right)}$

On obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x + 3}{x^2 + 1} = 0$

La fonction dérivée de la fonction logarithme

La dérivée de la fonction logarithme

pour tout $x > 0$, on a :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Exemples

Puisque la dérivée de la fonction *ln* fait apparaitre un dénominateur, on gardera à l'esprit la nécessité de *réduire au même dénominateur* les résultats afin qu'ils soient exploitables.

avec $f(x) = \ln x + x$, on a $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}$

avec $g(x) = 4\ln x$, on a $g'(x) = 4 \times \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$

Application (en utilisant la formule vue en Première $(uv)' = u'v + uv'$)

avec $f(x) = x \ln x$ (pour $x > 0$)

→ on applique la formule $(uv)' = u'v + uv'$

avec $u(x) = x$ $\quad v(x) = \ln x$

$u'(x) = 1$ $\quad v'(x) = \frac{1}{x}$

On a donc : $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1$

Application (en utilisant la formule vue en Première $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$)

avec $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ (pour $x > 0$)

→ on applique la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = \ln x$ $\quad v(x) = x$

$u'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad v'(x) = 1$

On a donc : $g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

Comment dériver une fonction composée (avec logarithme)

Fonction composée : le principe

Qu'est qu'une fonction composée ? Pour faire simple, et résumer en quelques mots le principe de la composition, on peut dire qu'une fonction composée avec logarithme , c'est quand on va avoir une fonction avec une logarithme de "*n'importe quelle expression avec x sans que ce soit x tout seul* ".

Fonction composée et dérivation

La formule générale et les exemples qui suivent sont à mémoriser et à "photographier mentalement ".
On ne doit avoir aucun doute en Terminale lorsque l'on dérive une fonction composée avec logarithme.
Et on se souviendra qu'en dérivant une fonction composée, on aura toujours à multiplier le résultat par u '.

Pour toute fonction u dérivable (strictement positive),
on aura $(\ln u)' = \frac{1}{u} \times u' = \frac{u'}{u}$

Des exemples de dérivées

avec $f(x) = \ln(3x+1)$, on a $f'(x) = \frac{1}{3x+1} \times \boxed{3} = \frac{3}{3x+1}$

$\boxed{u'}$

avec $g(x) = \ln(x^2+1)$, on a $g'(x) = \frac{1}{x^2+1} \times \boxed{2x} = \frac{2x}{x^2+1}$

$\boxed{u'}$

avec $h(x) = 4\ln(x^2+3)$, on a $h'(x) = 4 \times \frac{1}{x^2+3} \times \boxed{2x} = \frac{8x}{x^2+3}$

$\boxed{u'}$

avec $i(x) = 3x\ln(2x+1)$,

on a $i'(x) = 3 \times \ln(2x+1) + 3x \times \frac{1}{2x+1} \times \boxed{2}$

c'est le u'

$= 3\ln(2x+1) + \frac{6x}{2x+1}$

on utilise ici la formule du produit
et la formule de la composée

Un exemple d'étude de fonction avec logarithme (1)

Il est nécessaire, dans ce chapitre, de voir des exemples (calculs de limites , dérivée et tableaux de variations) pour bien voir comment la fonction *logarithme* se met en place concrètement dans les exercices. ***Les fonctions étudiées sont tirées de sujet de bac***. Tous les calculs ne pourront pas être tous parfaitement détaillés , il faudra être capable de retrouver, par soi-même, certains résultats.

Exemple d'énoncé (*d'après sujet bac antilles-guyane 2017*)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]\, 0\, ; +\infty\, [$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]\, 0\, ; +\infty\, [$.

1) Etudier les variations de la fonction f.
2) Déterminer son maximum

1) on calcule $f'(x)$ avec la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$\rightarrow u(x) = \ln x \quad v(x) = x$

$u'(x) = \dfrac{1}{x} \quad v'(x) = 1$

On a $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

Pour le signe de $1 - \ln x$, on résout $1 - \ln x = 0$

$\rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$.

Et on utilise par exemple des valeurs test pour trouver les signes !

Le dénominateur x^2 est bien sûr toujours positif.

On calcule les limites :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ (limite du type $\dfrac{-\infty}{0}$)

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (avec les croissances comparées) car c'est une forme indéterminée

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
Signes de f'		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0

2) On a donc un maximum en e, qui est égal à $f(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e}$.

Un exemple d'étude de fonction avec logarithme (2)

Il est nécessaire, dans ce chapitre, de voir des exemples (calculs de limites , dérivée et tableaux de variations) pour bien voir comment la fonction *logarithme* se met en place concrètement dans les exercices. ***Les fonctions étudiées sont tirées de sujet de bac***. Tous les calculs ne pourront pas être tous parfaitement détaillés , il faudra être capable de retrouver, par soi-même, certains résultats.

Exemple d'énoncé (*d'après sujet bac Amérique du Sud 2017*)

1. Soit φ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = x^2 - 1 + 3\ln x.$$

a. Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.

b. Étudier les variations de φ sur $]0\,;\,+\infty[$.
En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.

1) a) On a $\varphi(1) = 1^2 - 1 + 3 \times \ln 1$
$= 1 - 1 + 3 \times 0 = 0 \rightarrow \varphi(1) = 0$

On a $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = -\infty$ (limite du type $0 - 1 - \infty$ sans forme indéterminée)

b) On calcule $\varphi'(x) = 2x + 3 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2+3}{x}$

$\rightarrow \varphi'$ est toujours positive, pour tout $x > 0$.
Donc la fonction φ est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

on rajoute 1 et $\varphi(1) = 0$ dans le tableau

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signes de $\varphi'(x)$			$+$		
Variations de $\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $\boxed{-}$	0	$\nearrow$ $\boxed{+}$	

On en déduit que, pour $x \in]0\,;1]$, on a $\varphi(x) \leq 0$
et pour $x \in [1\,;+\infty[$, on a $\varphi(x) \geq 0$

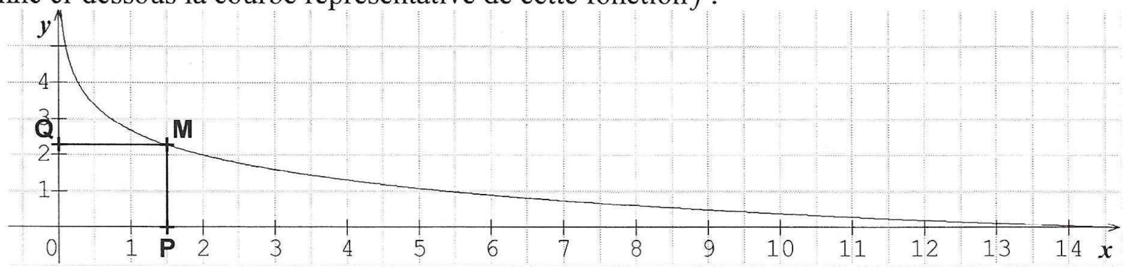
Un exemple d'étude de fonction avec logarithme (3)

Il est nécessaire, dans ce chapitre, de voir des exemples (calculs de limites , dérivée et tableaux de variations) pour bien voir comment la fonction *logarithme* se met en place concrètement dans les exercices. ***Les fonctions étudiées sont tirées de sujet de bac***. Tous les calculs ne pourront pas être tous parfaitement détaillés , il faudra être capable de retrouver, par soi-même, certains résultats.

Exemple d'énoncé (*d'après sujet bac Pondichery 2016*)

Soit f la fonction définie sur] 0 ; 14 [par $f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

On donne ci-dessous la courbe représentative de cette fonction f.



L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ? Si oui, donner les coordonnées correspondantes.

On calcule l'aire du rectangle OPMQ $= OP \times OQ = x \times f(x)$

$\rightarrow$ on a $A(x) = x\left(2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

On calcule $A'(x)$ avec la formule $(uv)' = u'v + uv'$

$\hookrightarrow u(x) = x \quad v(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

$u'(x) = 1 \quad v'(x) = -\boxed{\frac{1}{\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2}} = -\frac{1}{x}$

on applique $(\ln w)' = \frac{1}{w} \times w'$

On obtient $A'(x) = 1 \times \left(2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) + x \times \left(-\frac{1}{x}\right)$

$= 2 - \ln\frac{x}{2} - 1 = 1 - \ln\frac{x}{2}$

On résout $1 - \ln\frac{x}{2} = 0 \rightarrow \ln\frac{x}{2} = 1 \rightarrow \frac{x}{2} = e \rightarrow x = 2e$

et on utilise des valeurs test pour le signe de $A'(x)$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		2e		14
Signes de A'		+	0	−	
Variations de A		$\nearrow$	2e	$\searrow$	

L'aire $A(x)$ est donc maximale en $2e$, et ce maximum est égal à $A(2e) = 2e\left(2 - \ln\left(\frac{2e}{2}\right)\right) = 2e(2 - \ln e)$

$\rightarrow A(2e) = 2e(2-1) = 2e$.